Zadanie 39. (0–1)

Dany jest kąt o mierze α taki, że $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ oraz $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Dla kąta o mierze α spełnione jest równanie: $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.	**P**	**F**
2.	Dla kąta o mierze α spełnione jest równanie: $\lvert \operatorname{tg}\alpha \rvert = \frac{3}{4}$.	**P**	**F**

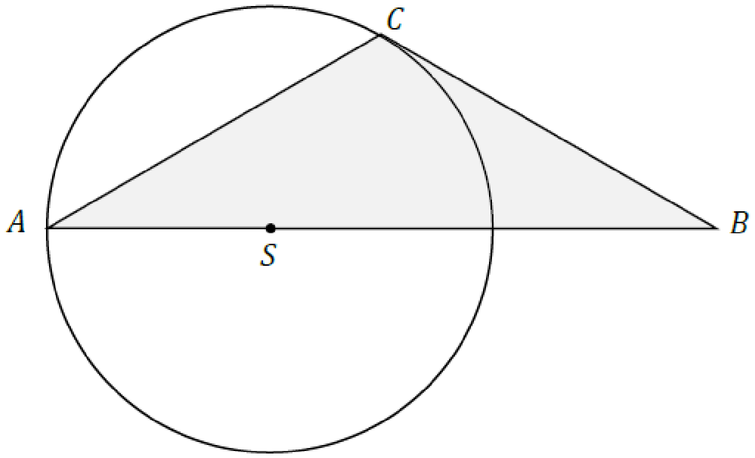
Zadanie 40. (0–2)

W trójkącie ABC dane są długości dwóch boków $|AB| = 12$, $|BC| = 8$ oraz miara kąta $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$.

Oblicz długość środkowej tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka A.

Zadanie 41. (0–4)

Wierzchołki A i C trójkąta ABC leżą na okręgu o promieniu r.
Środek S tego okręgu leży na boku AB tego trójkąta (zobacz rysunek poniżej).
Długości boków AB i AC są równe odpowiednio $|AB| = 3r$ oraz $|AC| = \sqrt{3}r$.



Oblicz miary wszystkich kątów wewnętrznych trójkąta ABC.

Zadanie 42. (0–1)

Punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC. Długość odcinka SA jest równa 10.

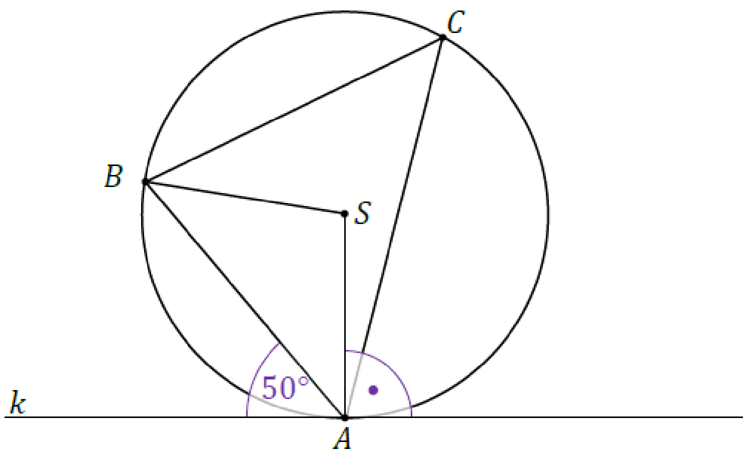
Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka A do boku BC jest równa

A. 10 **B.** 15 **C.** 20 **D.** 30

Zadanie 43. (0–1)

Dane są okrąg o środku S oraz prosta k styczna do okręgu w punkcie A.
Odcinek AB jest cięciwą tego okręgu. Miara kąta ostrego pomiędzy prostą k a cięciwą AB jest równa $50°$. Punkt C leży na okręgu. Kąt wpisany BCA jest ostry.
Sytuację przedstawia rysunek poniżej.



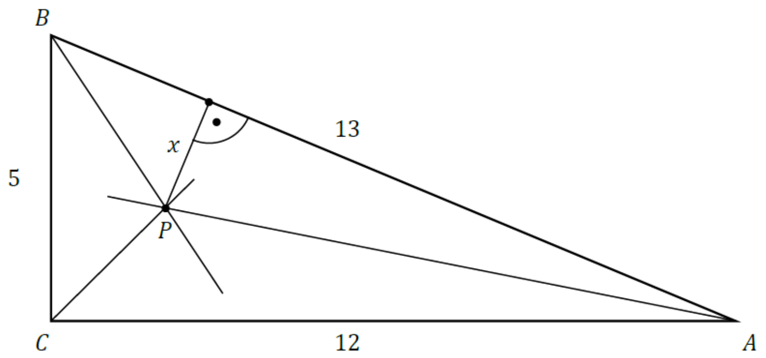
Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta wpisanego BCA jest równa

A. $100°$ **B.** $80°$ **C.** $50°$ **D.** $40°$

Zadanie 44. (0–1)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o bokach $|AC| = 12$, $|BC| = 5$, $|AB| = 13$. Dwusieczne kątów tego trójkąta przecinają się w punkcie P (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

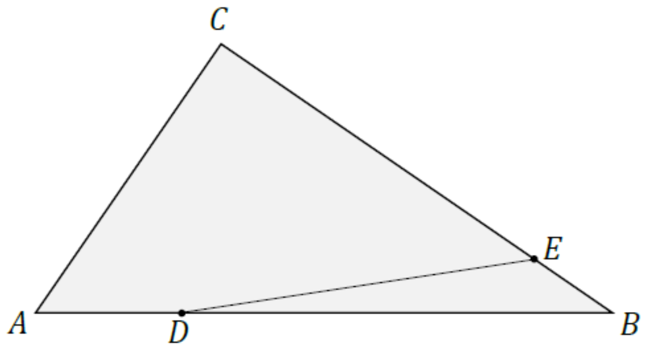
Odległość x punktu P od przeciwprostokątnej AB jest równa

A. 1 **B.** 2 **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{20}{13}$

Zadanie 45. (0–3)

Dany jest trójkąt ABC. Na boku AB tego trójkąta wybrano punkt D, taki, że $|AD| = \frac{1}{4}|AB|$, a na boku BC wybrano taki punkt E, że $|BE| = \frac{1}{5}|BC|$ (zobacz rysunek poniżej).
Pole trójkąta ABC jest równe 20.

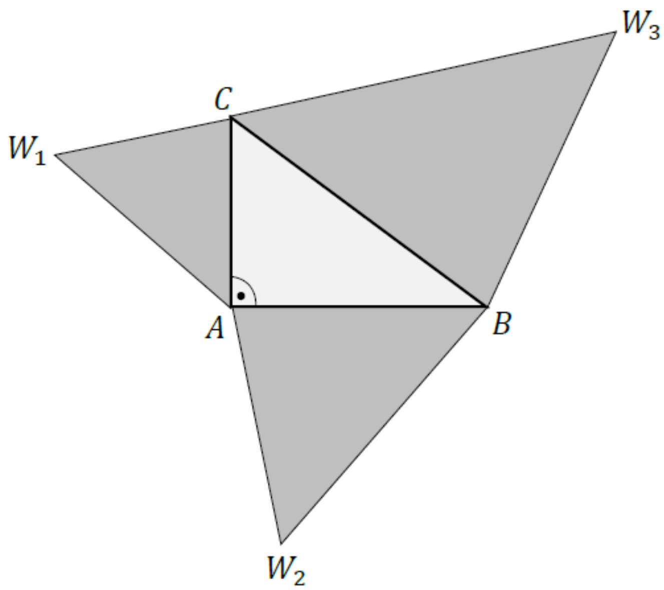
Oblicz pole trójkąta DBE.



Zadanie 46. (0–3)

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa można udowodnić bardziej ogólną własność niż ta, o której mówi samo to twierdzenie.

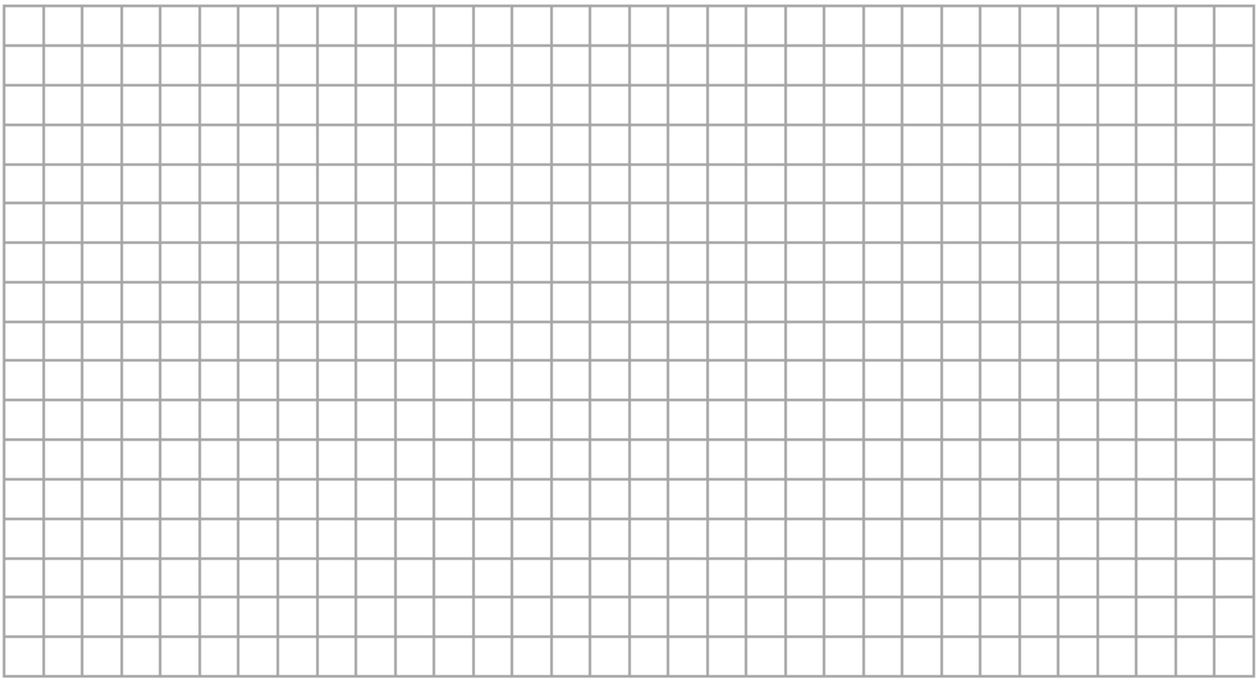
Rozważmy trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A. Niech każdy z boków tego trójkąta: CA, AB, BC będzie podstawą trójkątów podobnych, odpowiednio: CAW_1, ABW_2, BCW_3. Trójkąty te mają odpowiadające sobie kąty o równych miarach, odpowiednio przy wierzchołkach: W_1, W_2, W_3.



Pola trójkątów: CAW_1, ABW_2, BCW_3 oznaczymy odpowiednio jako P_1, P_2, P_3.

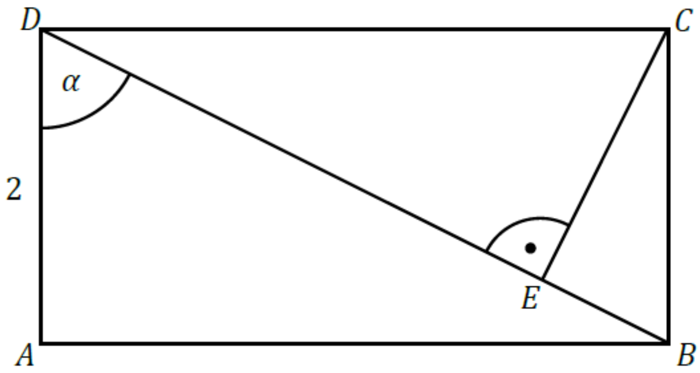
Udowodnij, że

$$\boldsymbol{P_3 = P_1 + P_2}$$



Zadanie 47. (0–3)

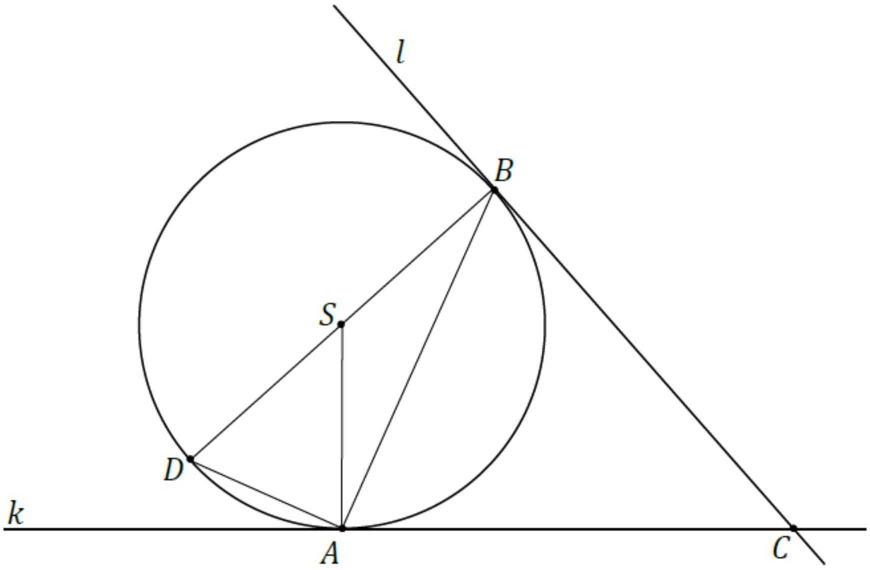
Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AD| = 2$. Kąt BDA ma miarę α, taką, że $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Przekątna BD i prosta przechodząca przez wierzchołek C prostopadła do BD przecinają się w punkcie E (zobacz rysunek).



Oblicz długość odcinka CE.

Zadanie 48. (0–2)

Trzy różne punkty A, B i D leżą na okręgu o środku w punkcie S. Odcinek BD jest średnicą tego okręgu. Styczne k i l do tego okręgu, odpowiednio w punktach A i B, przecinają się w punkcie C (zobacz rysunek poniżej).



Wykaż, że trójkąty ACB i ASD są podobne.

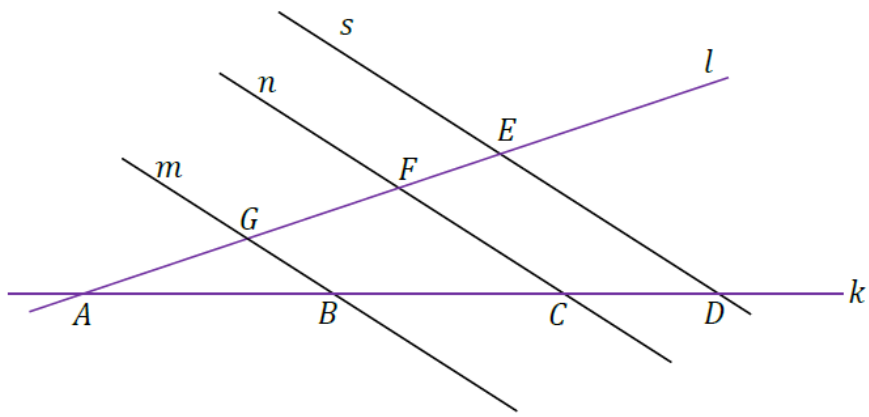
Zadanie 49. (0–3)

Dany jest trójkąt ABC o bokach długości: $|AB| = 4$, $|BC| = 5$, $|AC| = 6$.

Oblicz sinus najmniejszego kąta wewnętrznego trójkąta ABC.

Zadanie 50. (0–1)

Proste k i l przecinają się w punkcie A. Proste m, n i s są wzajemnie równoległe i przecinają obie proste k i l w punktach B, C, D, E, F, G (zobacz rysunek poniżej), w taki sposób, że: $|BC| = 30$, $|CD| = 20$, $|GF| = 21$.



Oblicz długość odcinka FE.

Zadanie 51. (0–1)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dany jest okrąg $\mathcal{O}$ określony równaniem:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–G.

1. Środek S okręgu $\mathcal{O}$ ma współrzędne

A. $S = (2, -3)$

B. $S = (-2, -3)$

C. $S = (-2, 3)$

D. $S = (-2, 3)$

2. Promień r okręgu $\mathcal{O}$ jest równy

E. $r = 16$

F. $r = 4$

G. $r = 5$

Zadanie 52. (0–1)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dane są punkty $A = (1, 2)$ oraz $B = (3, 7)$.
Punkty A_O oraz B_O są odpowiednio obrazami punktów A i B w symetrii środkowej o środku w punkcie $O = (0, 0)$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A_O i B_O jest równy

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\left(-\frac{5}{2}\right)$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $\left(-\frac{2}{5}\right)$

Zadanie 53. (0–1)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dany jest trapez $ABCD$, w którym boki AB i CD są równoległe oraz $C = (3, 15)$. Wierzchołki A i B tego trapezu leżą na prostej o równaniu $3x - y + 10 = 0$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Bok CD tego trapezu zawiera się w prostej o równaniu

A. $y = 3x + 15$

B. $y = 3x + 6$

C. $y = \frac{5}{3}x + 10$

D. $y = -\frac{1}{3}x + 16$

Zadanie 54. (0–3)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), punkty $A = (-1, -5)$, $B = (2, -7)$, $C = (6, 9)$ i $D = (-2, 9)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$.

Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$.

Zadanie 55. (0–4)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przekątne równoległoboku $ABCD$ przecinają się w punkcie $S = \left(\frac{11}{2}, \frac{17}{2}\right)$. Bok AB tego równoległoboku zawiera się w prostej o równaniu $y = x - 2$, a bok AD zawiera się w prostej o równaniu $y = 3x - 6$.

Oblicz współrzędne wierzchołka B.

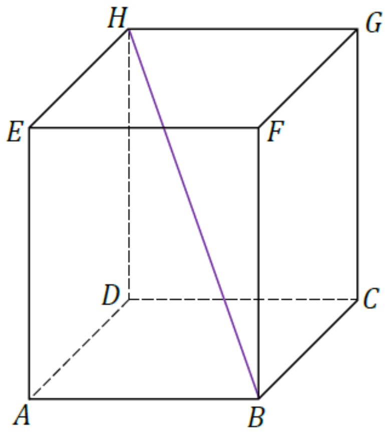
Zadanie 56. (0–4)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (2, 8)$ oraz $B = (10, 2)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABP, w którym $|AP| = |BP|$.
Wierzchołek P leży na osi Ox układu współrzędnych.

Oblicz współrzędne punktu P <u>oraz</u> długość odcinka AP.

Zadanie 57.

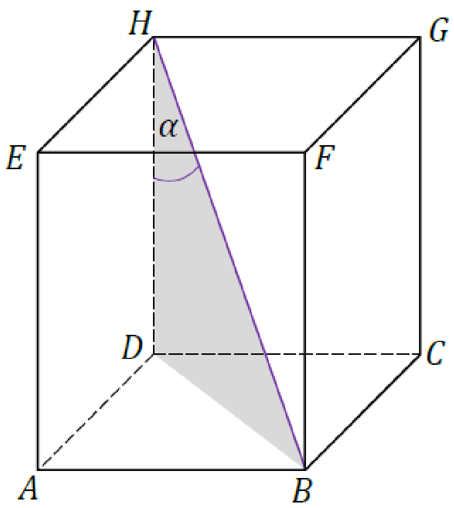
Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$, w którym prostokąty $ABCD$ i $EFGH$ są jego podstawami. Odcinek BH jest przekątną tego prostopadłościanu.



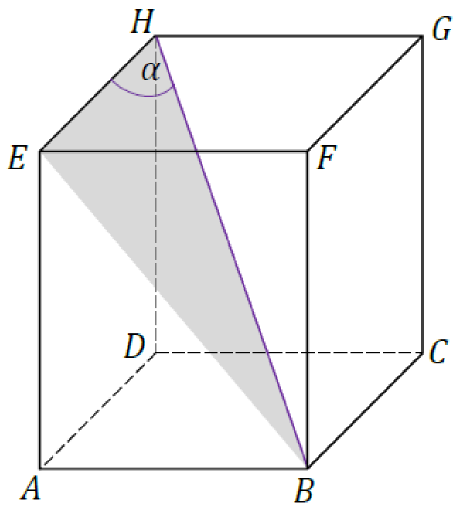
Zadanie 57.1. (0–1)

Na którym rysunku prawidłowo oznaczono i podpisano kąt α pomiędzy przekątną BH prostopadłościanu a jego ścianą boczną $ADHE$? Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

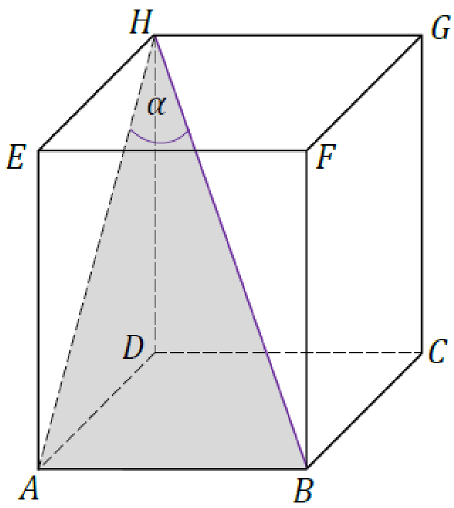
A. $\alpha = \sphericalangle BHD$



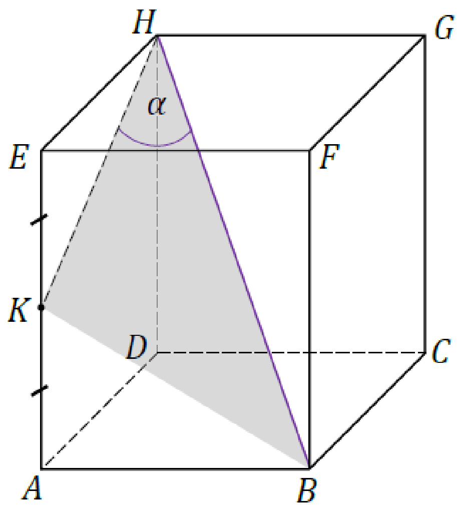
B. $\alpha = \sphericalangle BHE$



C. $\alpha = \sphericalangle BHA$



D. $\alpha = \sphericalangle BHK$, gdzie K jest środkiem krawędzi AE.

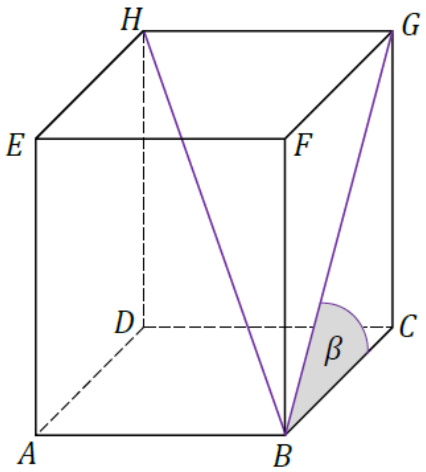


Zadanie 57.2. (0–4)

W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ dane są:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{9}{7} \qquad |BG| = 2\sqrt{130} \qquad |BH| = 2\sqrt{194}$$

gdzie odcinek BH jest przekątną prostopadłościanu, odcinek BG jest przekątną ściany bocznej $BCGF$, β jest miarą kąta GBC. Sytuację ilustruje rysunek poniżej.



Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$.

Zadanie 58. (0–1)

Dane są dwa prostopadłościany podobne: $\mathcal{B}_1$ oraz $\mathcal{B}_2$. Objętość prostopadłościanu $\mathcal{B}_1$ jest równa V, a objętość prostopadłościanu $\mathcal{B}_2$ jest równa $27V$. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $\mathcal{B}_1$ jest równe P.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $\mathcal{B}_2$ jest równe

<table>
<tr><td>A.</td><td>$27P$,</td><td rowspan="3">ponieważ stosunek pól powierzchni całkowitych prostopadłościanów podobnych jest równy</td><td>1.</td><td>stosunkowi objętości tych prostopadłościanów.</td></tr>
<tr><td>B.</td><td>$9P$,</td><td>2.</td><td>pierwiastkowi kwadratowemu ze stosunku objętości tych prostopadłościanów.</td></tr>
<tr><td>C.</td><td>$3\sqrt{3}P$,</td><td>3.</td><td>kwadratowi stosunku długości odcinków odpowiadających w obu prostopadłościanach.</td></tr>
</table>

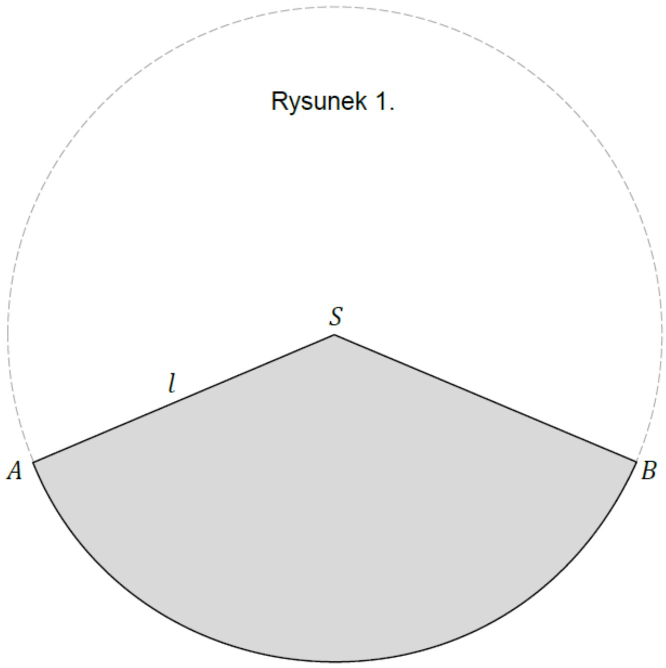
Zadanie 59.

Hania zaprojektowała i wykonała czapeczkę na bal urodzinowy młodszego brata. Czapeczka miała kształt powierzchni bocznej stożka o średnicy podstawy $d = 20$ cm, wysokości $H = 25$ cm i tworzącej l.

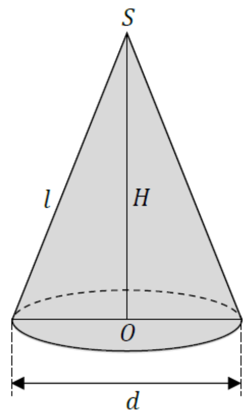
Żeby wykonać czapeczkę, Hania najpierw narysowała na kartonie figurę płaską ABS o kształcie wycinka koła o promieniu l i środku S (zobacz rysunek 1.). Następnie wycięła tę figurę z kartonu, odpowiednio ją wymodelowała i skleiła odcinek SB z odcinkiem SA (zobacz rysunek 2.).

Do obliczeń przyjmij, że rzeczywiste figury są idealne.

Rysunek 1.



Rysunek 2.



Zadanie 59.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt rozwarcia stożka, którego powierzchnią boczną jest czapeczka, ma miarę (w zaokrągleniu do $1°$)

A. $44°$ **B.** $136°$ **C.** $134°$ **D.** $68°$

Wskazówka: skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.

Zadanie 59.2. (0–3)

Oblicz miarę kąta BSA wycinka koła, z którego powstała powierzchnia boczna stożka opisanego we wstępie do zadania. Miarę kąta BSA podaj w zaokrągleniu do jednego stopnia.

Zadanie 60. (0–4)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°, a krawędź podstawy ma długość równą $6\sqrt{3}$.

Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Zadanie 61. (0–1)

Pole powierzchni bocznej walca jest równe 16π, a promień jego podstawy ma długość 2.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

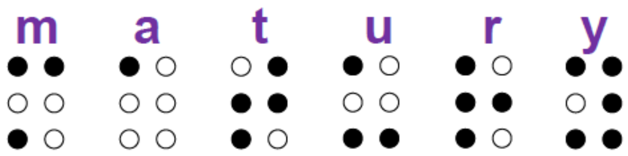
Objętość tego walca jest równa

A. 16 **B.** 32 **C.** 16π **D.** 32π

KOMBINATORYKA, RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA

Zadanie 62. (0–2)

Pojedynczy znak w piśmie Braille'a dla niewidomych jest kombinacją od 1 do 6 wypukłych punktów, które mogą zajmować miejsca ułożone w dwóch kolumnach po trzy miejsca w każdej kolumnie. Poniżej podano przykład napisu w piśmie Braille'a. Czarne kropki w znaku oznaczają wypukłości, a białe kropki oznaczają brak wypukłości. Pojedynczy znak w piśmie Braille'a musi zawierać co najmniej jeden punkt wypukły.

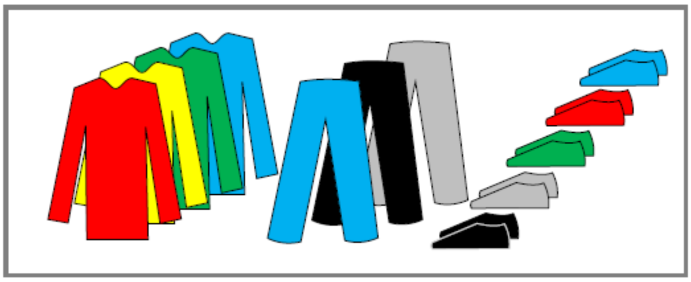


Oblicz, ile różnych pojedynczych znaków można zapisać w piśmie Braille'a.

Zadanie 63.

Andrzej ma w szafie 4 koszule: czerwoną, żółtą, zieloną i niebieską; 3 pary spodni: niebieskie, czarne i szare; oraz 5 par butów: czarne, szare, zielone, czerwone i niebieskie.

Andrzej wybiera z szafy zestaw ubrania: jedną koszulę, jedną parę spodni i jedną parę butów. Zestawy ubrania wybierane przez Andrzeja określimy jako różne, gdy będą różniły się kolorem chociaż jednego rodzaju elementu ubioru w zestawie.



Zadanie 63.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba wszystkich możliwych, różnych zestawów ubrania, jakie może wybrać Andrzej, jest równa

A. 12 **B.** 72 **C.** 60 **D.** 720

Zadanie 63.2. (0–3)

Oblicz, na ile sposobów można wybrać taki zestaw, w którym <u>dokładnie jeden</u> element ubioru będzie niebieski.

Zadanie 64. (0–4)

Spośród wszystkich czterocyfrowych całkowitych liczb dodatnich losujemy jedną liczbę.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba będzie parzysta, a w jej zapisie dziesiętnym wystąpią dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3.

Zadanie 65.

Na wykresie słupkowym poniżej podano rozkład miesięcznych zarobków wszystkich pracowników w pewnej firmie $\mathcal{F}$. Na osi poziomej podano – wyrażone w tysiącach złotych – miesięczne wynagrodzenie netto pracowników firmy $\mathcal{F}$, a na osi pionowej przedstawiono liczbę osób, która osiąga podane zarobki.

Zadanie 65.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dominantą miesięcznych zarobków w firmie $\mathcal{F}$ jest

A.	10 tys. zł,	ponieważ	**1.**	tę wartość zarobków osiąga najwięcej osób w firmie $\mathcal{F}$.
B.	4,5 tys. zł,		**2.**	ta wartość zarobków jest największa w firmie $\mathcal{F}$.
C.	4 tys. zł,		**3.**	iloczyn tej wartości zarobków i liczby osób z takimi zarobkami jest największy w firmie $\mathcal{F}$.

Zadanie 65.2. (0–1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Medianą miesięcznych zarobków w firmie $\mathcal{F}$ jest .... tys. zł.

Zadanie 65.3. (0–2)

Oblicz średnią miesięcznego wynagrodzenia netto wszystkich pracowników firmy $\mathcal{F}$. Wynik podaj bez zaokrąglania.

Zadanie 65.4. (0–2)

Oblicz, jaki procent liczby wszystkich pracowników firmy $\mathcal{F}$ stanowi liczba osób zarabiających $5,5$ tys. zł lub mniej. Wynik podaj w zaokrąglaniu do 1%.

Zadanie 66. (0–2)

Ze zbioru sześciu liczb $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ losujemy ze zwracaniem kolejno dwa razy po jednej liczbie.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że pierwsza wylosowana liczba będzie większa od drugiej wylosowanej liczby.