

IX. CIĄG GEOMETRYCZNY

- Ciąg geometryczny:

Wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & \text{dla } q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{dla } q = 1 \end{cases}$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznym zachodzi związek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

- Procent składany:

Jeżeli kapitał początkowy K złożymy na n lat w banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi $p\%$ w skali rocznej, to kapitał końcowy K_n wyraża się wzorem:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

ZADANIA:

1. Dla danego ciągu geometrycznego (a_n) podaj pierwszy wyraz a_1 i iloraz q . Oblicz wartość a_8 . Podaj sumę 7 początkowych wyrazów ciągu S_7 .

a) $a_n = 8, 4, 2, 1, \dots$

b) $a_n = -3 \cdot 2^n$

2. Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) w postaci xy^n i oblicz a_{10} :

a) $a_n = 6, 12, 24, \dots$

b) $a_n = 8, -4, 2, -1, \dots$

3. Wyznacz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego a_1 wiedząc, że $q = 5$ i $a_7 = 125$.

4. Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego q wiedząc, że $a_1 = -1$ i $a_{10} = -512$.

5. Wyznacz liczbę n wyrazów ciągu geometrycznego wiedząc, że $a_1 = 9$, $q = 5$, $a_n = 1125$.

6. Zbadaj, czy ciąg o podanym wyrazie ogólnym jest geometryczny i określ jego monotoniczność:

a) $a_n = 3^n$

b) $a_n = 2 \cdot (-4)^n$

c) $a_n = n^3$

7. Wykaż, że liczby: $\sqrt{5} - 2, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5} + 2}{4}$ tworzą ciąg geometryczny.

8. Wyznacz ciąg geometryczny mając dane:

a) $a_2 = 10, a_3 = 20$

b) $a_3 = 9, a_5 = 81$

9. Znajdź trzeci wyraz ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli $n \geq 1$ oraz:

a) $a_5 = 6, a_6 = 12$

b) $a_5 = 27, a_8 = 729$

10. Pomiedzy liczby 243 i 48 wstaw takie trzy liczby, aby wraz z danymi tworzyły ciąg geometryczny.

11. Pewne urządzenie w fabryce ulega szybkiemu zużyciu i jego wartość rynkowa jest równa połowie wartości sprzed roku. Oblicz cenę nowego urządzenia wiedząc, że po siedmiu latach eksploatacji jest warte 5 tys. zł.

12. Piłka, odbijając się od ziemi, osiągała za każdym razem $\frac{2}{3}$ swojej poprzedniej wysokości.
Jak wysoko wzniosła się piłka po pierwszym uderzeniu, jeśli po szóstym osiągnęła wysokość 32 cm.

13. Pan Kowalczyk złożył do banku 3000 zł na 3 lat. Jaką kwotę będzie miał na koncie po tym okresie, jeśli oprocentowanie w banku wynosi 8% w skali roku, a odsetki kapitalizuje się:

a) co rok

b)* co kwartał