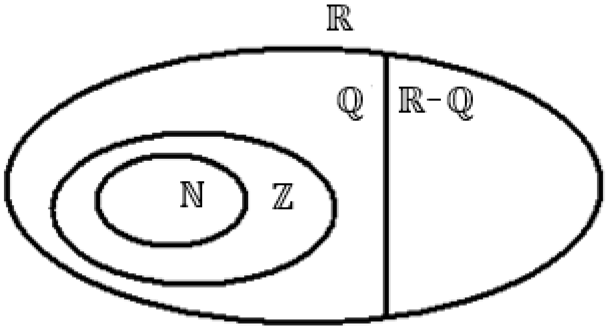
I. <u>DZIAŁANIA W ZBIORZE LICZB RZECZYWISTYCH</u>



ZBIORY LICZBOWE:

<u>liczby naturalne</u>: $\mathbb{N} = \{\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots\ \}$

<u>liczby całkowite</u>: $\mathbb{Z} = \{\ \dots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\ \}$

<u>liczby wymierne</u>: można przedstawić za pomocą ułamka zwykłego, np. $\left\{-2;\ -1\frac{1}{3};\ 0;\ \frac{3}{4};\ 2,(7)\right\} \in \mathbb{Q}$

Każdą liczbę wymierną można przedstawić za pomocą ułamka dziesiętnego skończonego lub nieskończonego okresowego.

np. $\frac{1}{4} = 0{,}25$ $\qquad \frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots = 0{,}1(6)$

Ułamki okresowe są wymierne – każdy ułamek okresowy możemy zamienić na ułamek zwykły.

np. $0,(3) = \frac{1}{3}$ $\quad 0,(6) = \frac{2}{3}$ $\quad 0,(1) = \frac{1}{9}$ $\quad 0,(12) = \frac{12}{99}$ $\quad 0,(123) = \frac{123}{999}$

<u>liczby niewymierne</u>: to liczby rzeczywiste, które nie są wymierne np. $\left\{-\sqrt{2};\ log_2 3\ ;\ \pi\ \right\} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

Liczby niewymierne mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe.

<u>liczby rzeczywiste</u>: wszystkie liczby wymierne wraz z niewymiernymi $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

<u>liczby pierwsze</u>: liczby naturalne większe od 1, posiadające tylko dwa dzielniki (tzn. dzielą się przez 1 i przez samą siebie), np. $\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ \dots\}$

<u>liczby złożone</u>: to liczby naturalne większa od 1, które mają więcej niż dwa dzielniki, np. 12

<u>liczby przeciwne</u>: to dwie liczby, których suma wynosi 0 (mają tę samą wartość, ale przeciwny znak) np. 2 i –2

<u>liczby odwrotne</u>: to dwie liczby, których iloczyn jest równy 1 (zapisane za pomocą ułamka zwykłego niewłaściwego mają zamieniony względem siebie licznik z mianownikiem)

np. $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{2}$

Zad.1. W zbiorze $A = \left\{-10,(2); -\sqrt{49}; -\sqrt{7}; -\frac{1}{\pi}; \sqrt[3]{8}; \sqrt{9\frac{1}{4}}\right\}$ wskaż liczby wymierne.

POTĘGI:

Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n–tą potęgę jako: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$

$a^0 = 1$ dla $x \neq 0$ np. $5^0 = 1$ $a^1 = a$ np. $5^1 = 5$

Potęga o wykładniku ujemnym:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ np. $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ np. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

Potęga o wykładniku wymiernym:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ np. $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

Prawa działań na potęgach:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ np. $5^{15} \cdot 5^5 = 5^{20}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ np. $\frac{5^{15}}{5^5} = 5^{10}$

$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$ np. $\left(5^2\right)^5 = 5^{10}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ np. $(2 \cdot x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4x^2$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ np. $\left(\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^{10} = 1$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ np. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

Zad.2. Oblicz:

a) $-2^2 + 3^0 =$

b) $(-1)^5 - (-1)^4 =$

c) $3 - 2 \cdot (-3)^2 =$

d) $2^1 + 2^2 + 2^3 =$

Zad.3. Przedstaw poniższe wyrażenia w postaci jednej potęgi:

a) $\left(2^4 \cdot 2^3\right) : 2^2 =$

b) $\left(5^3 \cdot 5^2\right)^4 : \left(5^2\right)^3 =$

c) $\frac{\left(0{,}5^2\right)^7 : 0{,}5^4}{0{,}5^6 \cdot 0{,}5} =$

d) $\frac{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5\right)^4}{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^6} =$

Zad.4. Przedstaw poniższe wyrażenia w postaci potęgi o podstawie x:

a) $\frac{(x^{-2})^7 : x^{-4}}{x^{-6} \cdot x} =$

b) $\frac{\left(x^{-2} \cdot x^5\right)^{-2}}{(x^{-2})^{-3}} =$

Zad.5. Oblicz (sprowadź potęgi do jednej wspólnej podstawy lub kilku wspólnych podstaw):

a) $\frac{2^6 \cdot 8^5}{4^9} =$

b) $\frac{27^2 \cdot 3^4}{9^5} =$

c) $\frac{3^{13} \cdot 5^{11}}{15^{10}} =$

d) $\frac{2^{30} \cdot 3^{20}}{12^{15}} =$

Zad.6. Podany iloczyn zapisz w postaci potęgi liczby 2, a następnie potęgi liczby 4.

$\left(\frac{1}{8}\right)^{20} \cdot 2^{30} \cdot 4^{-10} =$

Zad.7. Zapisz w postaci jednej potęgi:

a) połowę 2^{50}

b) trzecią część 3^{60}

Zad.8. Podane wyrażenie zapisz w postaci odpowiedniej potęgi 2 lub 3:

a) $2^5 + 2^5 =$

b) $3^6 + 3^6 + 3^6 =$

Zad.9. Podaną sumę zapisz w postaci potęgi liczby 4, a następnie potęgi liczby 2 .

$16^{20}+16^{20}+16^{20}+16^{20}=$

Zad.10. Zapisz w postaci jednej potęgi i oblicz:

a) $2^7\cdot 5^7=$

c) $\frac{6^4}{3^4}=$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^5\cdot 8^5=$

d) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3:\left(\frac{1}{9}\right)^3=$

Zad.11. Zapisz w postaci potęgi liczby 2:

a) $\sqrt[3]{2^6}=$

c) $\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt{8}=$

b) $\left(4\sqrt{2}\right)^3=$

d) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=$

Zad.12. Oblicz:

a) $81^{\frac{1}{2}}=$

d) $\left(3^{\frac{5}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}=$

b) $9^{-\frac{3}{2}}=$

e) $\left(2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{7}}=$

c) $8^{-\frac{2}{3}}=$

e) $\left(\sqrt[5]{4\cdot\sqrt{2}}\right)^2=$

PIERWIASTKI:

Pierwiastkiem drugiego stopnia z liczby a jest liczba b, której druga potęga jest równa a:
$\sqrt{a}=b$ jeśli $b^2=a$, $a\geq 0$, $b\geq 0$, np. $\sqrt{9}=3$, bo $3^2=9$.

Pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby a jest liczba b, której trzecia potęga jest równa a:
$\sqrt[3]{a}=b$ jeśli $b^3=a$, np. $\sqrt[3]{8}=2$, bo $2^3=8$.

Prawa działań na pierwiastkach:

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ np. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{6}$

$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ np. $\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ np. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{6}{3}}=\sqrt{2}$

$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ np. $\left(\sqrt{2021}\right)^2=2021$

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a$ np. $\left(\sqrt[3]{2022}\right)^3=2022$

Zad.13. Oblicz:

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}=$

c) $\sqrt[3]{24}:\sqrt[3]{3}=$

b) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}=$

d) $\sqrt{32}:\sqrt{2}=$

Zad.14. Oblicz:

a) $\sqrt{9a^2}=$

b) $\sqrt{25x^4y^6z^8}=$

c) $\sqrt{\frac{9}{25}}=$

Zad.15. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka:

a) $\sqrt{12}=$

c) $\sqrt{1260}=$

b) $\sqrt[3]{24}=$

d) $\sqrt[3]{2160}=$

Zad.16. Doprowadź do najprostszej postaci:

a) $\sqrt{5}+\sqrt{20}=$

b) $\sqrt{8}-\sqrt{32}+\sqrt{128}=$

Zad.17. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

c) $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Zad.18. Wykonaj działania (wykorzystaj wzory skróconego mnożenia):

a) $(2x+1)^2 =$

b) $(3x-2y)^2 =$

c) $(x-2)^2 - (3-x)^2 =$

d) $(5x-3y)(5x+3y) =$

Zad.19. Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia zamień sumę na iloczyn.
Użyj wzoru: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

a) $x^2 - 4$

b) $2x^2 - 3 =$

c)* $(x+1)^2 - 9 =$

d)* $x^2 - (y+2)^2 =$

e)* $(x+3)^2 - (y-1)^2 =$

Zad.20. Oblicz:

a) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2 =$

b) $\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)^2 =$

c) $\left(\sqrt{6}-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+2\sqrt{3}\right) =$

d) $\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2 \cdot \left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2 =$

Zad.21. Oblicz:

a) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 =$

b) $\left[\left(4-12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(4+12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 =$

Zad.22. Usuń niewymierność z mianownika. Użyj wzoru: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

a) $\frac{4}{\sqrt{2}-1}$

b) $\frac{8}{\sqrt{5}+1}$

c) $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}+1}$

LOGARYTMY:

Logarytmem $\log_a c$ („logarytm z liczby c przy podstawie a") nazywamy wykładnik b potęgi, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę c:

$\boxed{\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c}$ dla $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$

Wzory dotyczące logarytmów:

$a^{\log_a c} = c$ $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$

$\log_a x^r = r \cdot \log_a x$ $\log_a x - \log_a y = \log_a (x : y)$

$\log x$ oraz $\lg x$ oznacza $\log_{10} x$.

Zad.23. Oblicz:

a) $\log_2 8 =$ f) $\log_3 \frac{1}{27} =$ k) $\log_{\sqrt[3]{2}} 2 =$

b) $\log_3 9 =$ g) $\log_{\frac{1}{2}} 32 =$ l) $\log_3 \sqrt{3} =$

c) $\log_7 7 =$ h) $\log_{\sqrt{7}} 1 =$ m) $\log_2 \sqrt[3]{2} =$

d) $\log_6 36 =$ i) $\log_\pi 1 =$ n) $\log_5 \sqrt{125} =$

e) $\log 1000 =$ j) $\log_{\sqrt{3}} 3 =$ o) $\log_7 \sqrt[3]{49} =$

Zad.24. Oblicz:

a) $\log_4 8 =$ b) $\log_8 \sqrt{32} =$

Zad.25. Oblicz stosując prawa działań na logarytmach:

a) $\log_6 3 + \log_6 12 =$

b) $\log_2 100 - \log_2 25 =$

c) $2\log 5 + 2\log 2 =$

d) $3\log \sqrt[3]{10} + \log 10^3 =$

Zad.26. Korzystając z definicji logarytmu ($\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$) rozwiąż równania:

a) $\log_2 x = 4$

b) $\log_x 8 = 3$

c) $\log_3(x+3) = 3$

Zad.27. Określ dziedzinę wyrażenia $\log_a c$ $(a > 0, a \neq 1, c > 0)$:

a) $\log(x+2)$

b) $\log_{x+8} 2$

c) $\log_x(x-6)$

DZIEDZINA WYRAŻENIA ALGEBRAICZNEGO:

Pewne wyrażenia dla niektórych wartości występujących w nich zmiennych tracą sens liczbowy tzn. nie można obliczyć wartości danego wyrażenia dla tych wartości zmiennych.

- dla wyrażeń wymiernych – mianownik musi być różny od zera, np. dla $\frac{x+3}{x-1}$ $\quad x-1 \neq 0$
- dla wyrażeń pod pierwiastkiem parzystego stopnia – wyrażenie musi być nieujemne, np. dla $\sqrt{x-1}$ $x-1 \geq 0$

Zad.28. Określ dziedzinę wyrażenia (dla jakiego $x \in R$ wyrażenie ma sens liczbowy?):

a) $\sqrt{x-2}$ b) $\frac{x+5}{x-6}$ c) $\frac{x+2}{\sqrt{x-3}}$

DOWODY ALGEBRAICZNE:

Kolejne liczby ($n \in \mathbb{Z}$):

całkowite:	$n,\ n+1,\ n+2$
parzyste:	$2n,\ 2n+2,\ 2n+4$
nieparzyste:	$2n+1,\ 2n+3,\ 2n+5$
wielokrotności 7:	$7n,\ 7n+7,\ 7n+14$
które przy dzieleniu na 5 dają resztę 3:	$5n+3,\ 5n+8,\ 5n+13$

Zad.29. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $10n^2 + 30n + 8$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3. [matura 2022-09]

Zad.30. Uzasadnij, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2. [matura 2012-06]

Zad.31. Udowodnij, że każda liczba całkowita k, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, ma tę własność, że reszta z dzielenia liczby $3k^2$ przez 7 jest równa 5. [matura 2014-05]

Zad.32. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $5n^2 + 15n$ jest podzielna przez 10.
[matura 2022-12]

Zad.33. Uzasadnij, że liczba $4^{12} + 4^{13} + 4^{14}$ jest podzielna przez 42. [matura 2013-12]