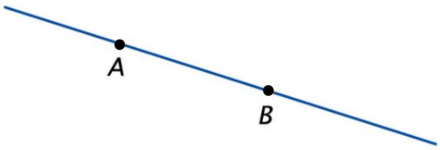
III. GEOMETRIA PŁASKA

PROSTE I PÓŁPROSTE:

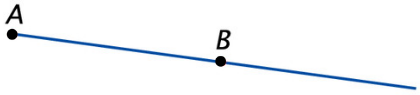
Prosta to linia o nieokreślonym początku i końcu. Prostą możemy oznaczyć małą literą, albo za pomocą dwóch dużych oznaczających dowolne dwa punkty należące do tej prostej (kolejność liter nie ma znaczenia).

prosta a

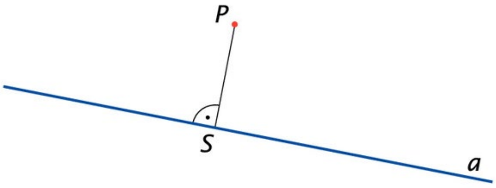


prosta AB

Półprosta jest równa połowie prostej, na której leży. Ma punkt początkowy, ale nie ma określonego końca. Półprostą oznaczamy za pomocą dwóch dużych liter. Pierwsza z tych liter oznacza początek półprostej (kolejność liter ma znaczenie).

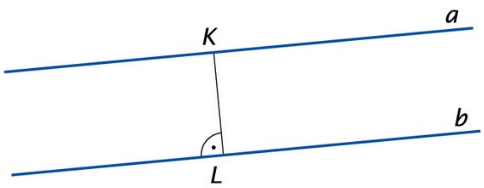


półprosta AB

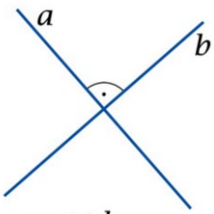


Odległość punktu od prostej jest to najmniejsza odległość między punktem P i prostą a. To długość odcinka PS prostopadłego do prostej a.

Odległość między prostymi równoległymi to długość najkrótszego odcinka łączącego te proste, czyli odcinka prostopadłego (odcinka KL).

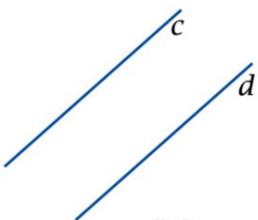


Proste prostopadłe $a \perp b$
przecinają się pod kątem prostym.



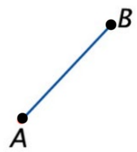
$a \perp b$

Proste równoległe $c \parallel d$
nie mają punktów wspólnych.

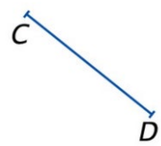


$c \parallel d$

Odcinek, to część prostej zawartej pomiędzy dwoma punktami. Każdy docinek ma dwa końce. Odcinek oznaczmy dużymi literami oznaczającymi jego końce.



odcinek AB



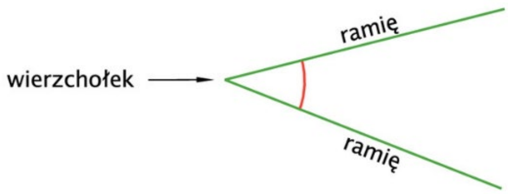
odcinek CD

Zad.1. Punkt K leży na prostej LM. Ustal jaka może być odległość między punktami K i M, jeśli wiadomo, że $LM = 3$, $LK = 5$.

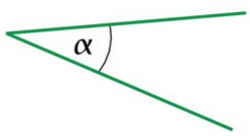
Zad.2. Odległość między punktami A i B wynosi 4 cm. Punkt A jest odległy od prostej k o 6 cm. Jaka może być najmniejsza, a jaka największa odległość punktu B od prostej k?

KĄTY:

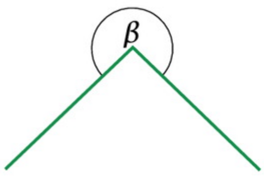
Kąt to część płaszczyzny wyznaczona przez dwie półproste o wspólnym początku.



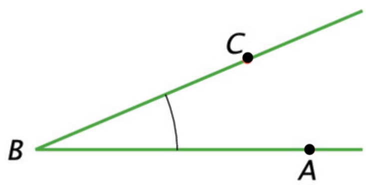
Kąty możemy oznaczać małymi literami alfabetu greckiego, np. α -alfa, β -beta, γ -gamma, δ -delta. Kąty też możemy oznaczać za pomocą trzech dużych liter, gdzie środkowa litera oznacza wierzchołek kąta.



$\sphericalangle \alpha$



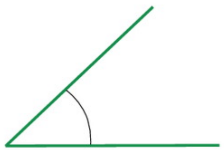
$\sphericalangle \beta$



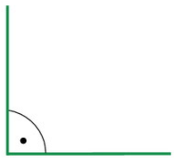
$\sphericalangle ABC$
(lub $\sphericalangle CBA$)

Rodzaje kątów:

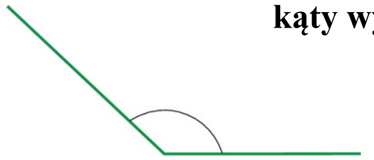
Kąt ostry, prosty i rozwarty to **kąty wypukłe**



Kąt ostry
ma mniej niż 90°.

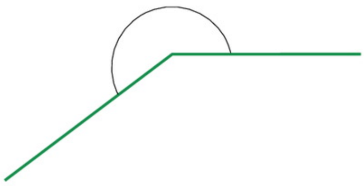


Kąt prosty
ma 90°.

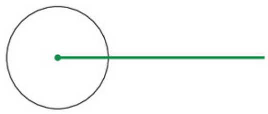


Kąt rozwarty
ma więcej niż 90°
i mniej niż 180°.

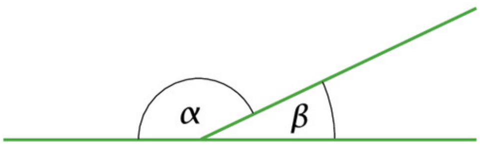
Kąt półpełny
ma 180°.



Kąt wklęsły
ma więcej niż 180°
i mniej niż 360°.

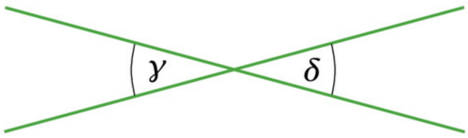


Kąt pełny
ma 360°.



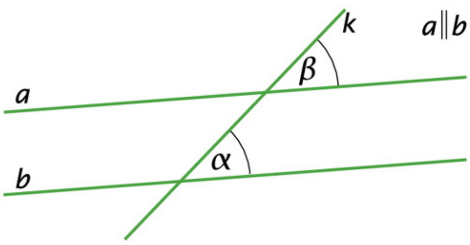
$\alpha + \beta = 180^\circ$

To są kąty **przyległe**. Mają one wspólne ramię i razem tworzą kąt półpełny. Suma ich miar wynosi 180°.



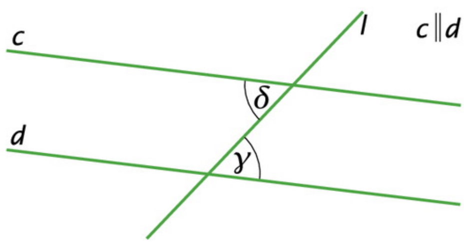
$\gamma = \delta$

To są kąty **wierzchołkowe**. Ich ramiona leżą na przecinających się prostych. Kąty te mają jednakowe miary.



$\alpha = \beta$

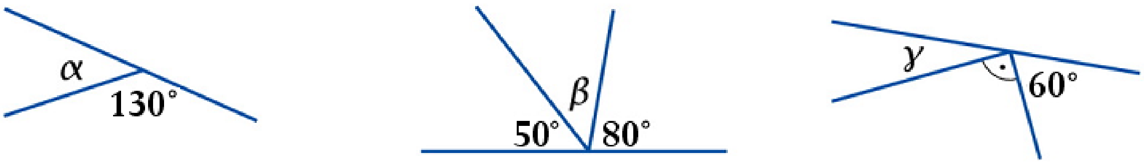
To są kąty **odpowiadające**. Utworzone zostały przez prostą *k* przecinającą proste równoległe *a* i *b*. Kąty te mają jednakowe miary.



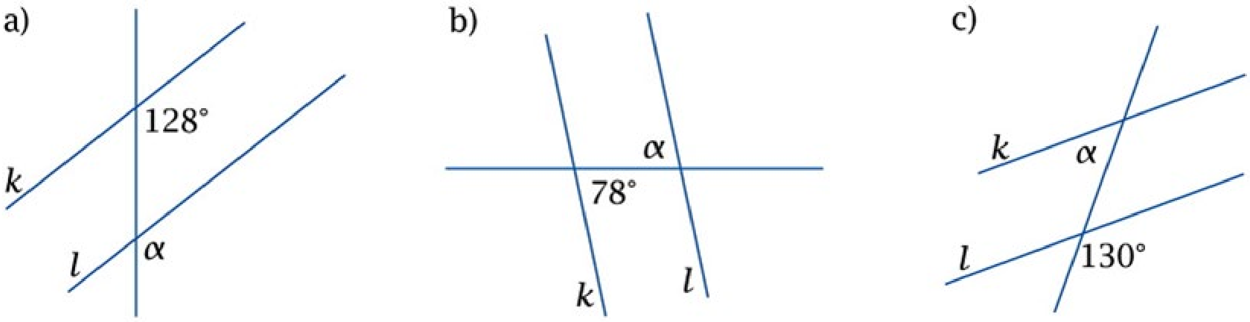
$\gamma = \delta$

To są kąty **naprzemianległe**. Utworzone zostały przez prostą *l* przecinającą proste równoległe *c* i *d*. Kąty te mają jednakowe miary.

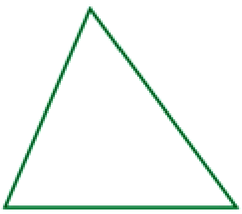
Zad.3. Jakie miary mają kąty α , β i γ ?

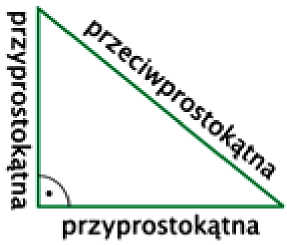


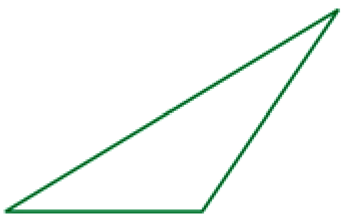
Zad.4. Na rysunkach proste k i l są równoległe. Oblicz miarę kąta α .



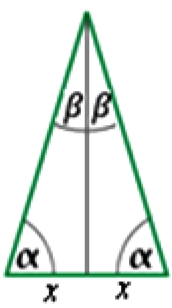
TRÓJKĄTY:



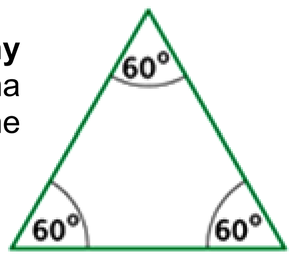




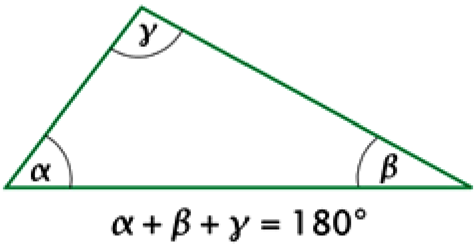
- **trójkąt ostrokątny** ma wszystkie kąty ostre
- **trójkąt prostokątny** ma jeden kąt prosty i dwa ostre
- **trójkąt rozwartokątny** ma jeden kąt rozwarty i dwa ostre
- w **trójkącie równoramiennym** kąty przy podstawie mają jednakowe miary, wysokość dzieli podstawę i kąt przy wierzchołku na połowy



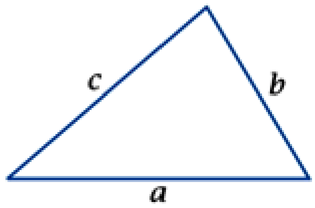
- **trójkąt równoboczny** jest foremny: ma równe boki i równe kąty po 60°



Suma kątów w trójkącie wynosi 180°



Warunek utworzenia trójkąta:



Każdy bok trójkąta ma długość mniejszą od sumy długości dwóch pozostałych boków.

$\boldsymbol{b+c>a} \quad \boldsymbol{a+c>b} \quad \boldsymbol{a+b>c}$

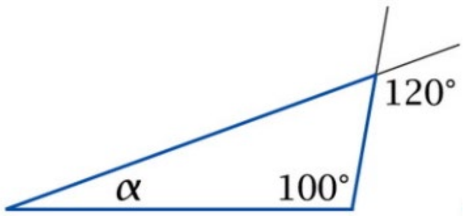
Aby stwierdzić czy z danych trzech odcinków można zbudować trójkąt, wystarczy sprawdzić, czy suma dwóch krótszych odcinków jest większa od najdłuższego.

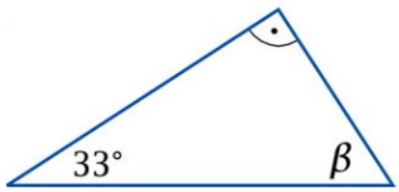
Zad.5. Czy boki trójkąta mogą mieć długość:

a) 3 cm, 4 cm, 5 cm

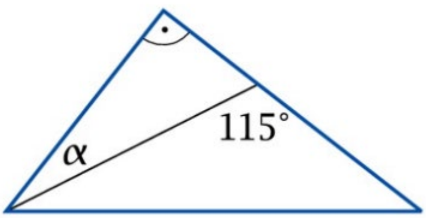
b) 1 cm, 2 cm, 3 cm

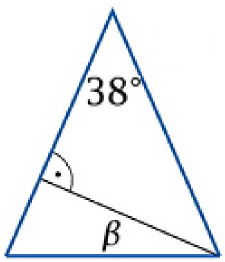
Zad.6. Jakie miary mają kąty α i β?

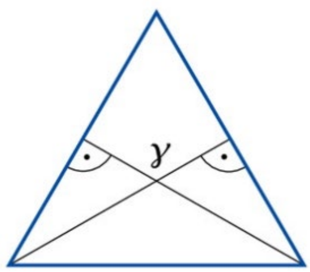




Zad.7. Narysowane trójkąty to trójkąt prostokątny, równoramienny i równoboczny. Oblicz miary kątów α, β, γ.





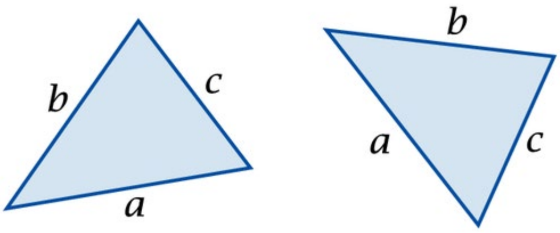


PRZYSTAWANIE TRÓJKĄTÓW:

Figury przystające to takie, które mają ten sam kształt i wielkość.

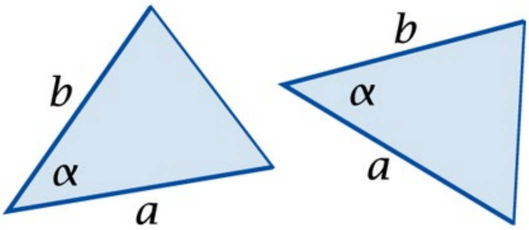
Gdybyśmy wycięli dwie figury przystające, to moglibyśmy przyłożyć jedną do drugiej tak, aby dokładnie się pokrywały. Figury przystające są identyczne.

Aby udowodnić, że dwa trójkąty są przystające, należy posłużyć się **cechami przystawania trójkątów**.



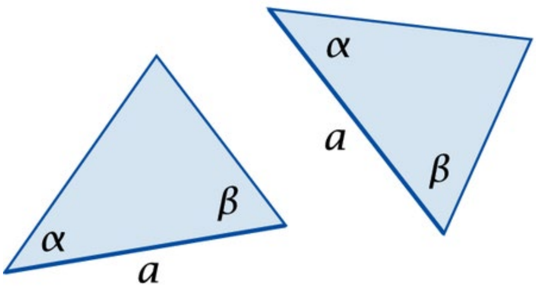
Jeżeli boki jednego trójkąta mają takie same długości jak odpowiednio boki drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.

Tę własność nazywamy pierwszą cechą przystawania trójkątów i oznaczamy w skrócie *bbb* (bok, bok, bok).



Jeżeli dwa boki jednego trójkąta mają takie same długości jak odpowiednie boki drugiego trójkąta i kąty między tymi bokami mają jednakowe miary, to trójkąty są przystające.

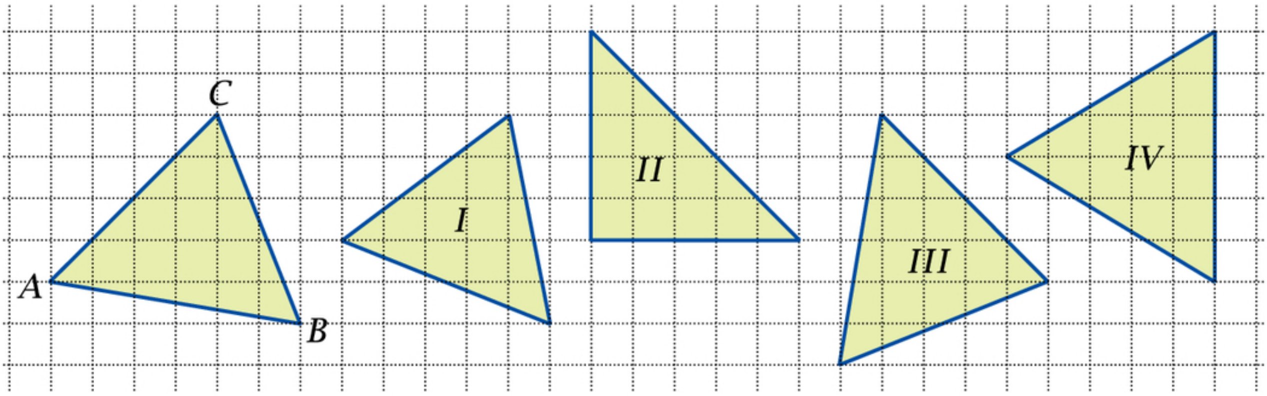
Tę własność nazywamy drugą cechą przystawania trójkątów i oznaczamy w skrócie *bkb* (bok, kąt, bok).



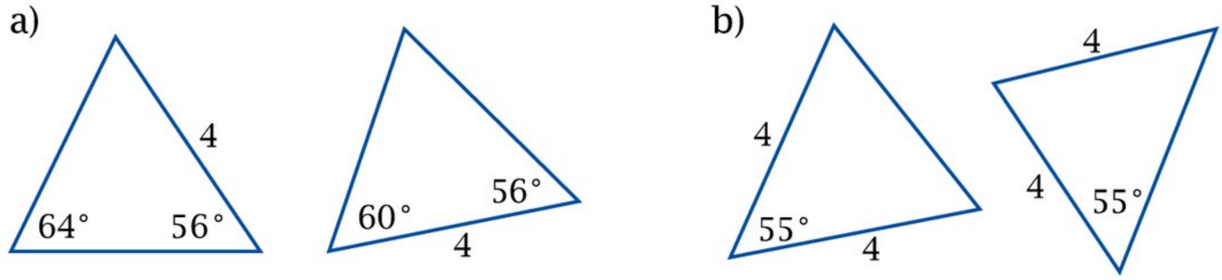
Jeżeli bok jednego trójkąta ma taką samą długość jak bok drugiego trójkąta, a kąty jednego trójkąta leżące przy tym boku mają takie same miary jak odpowiednie kąty drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.

Tę własność nazywamy trzecią cechą przystawania trójkątów i oznaczamy w skrócie *kbk* (kąt, bok, kąt).

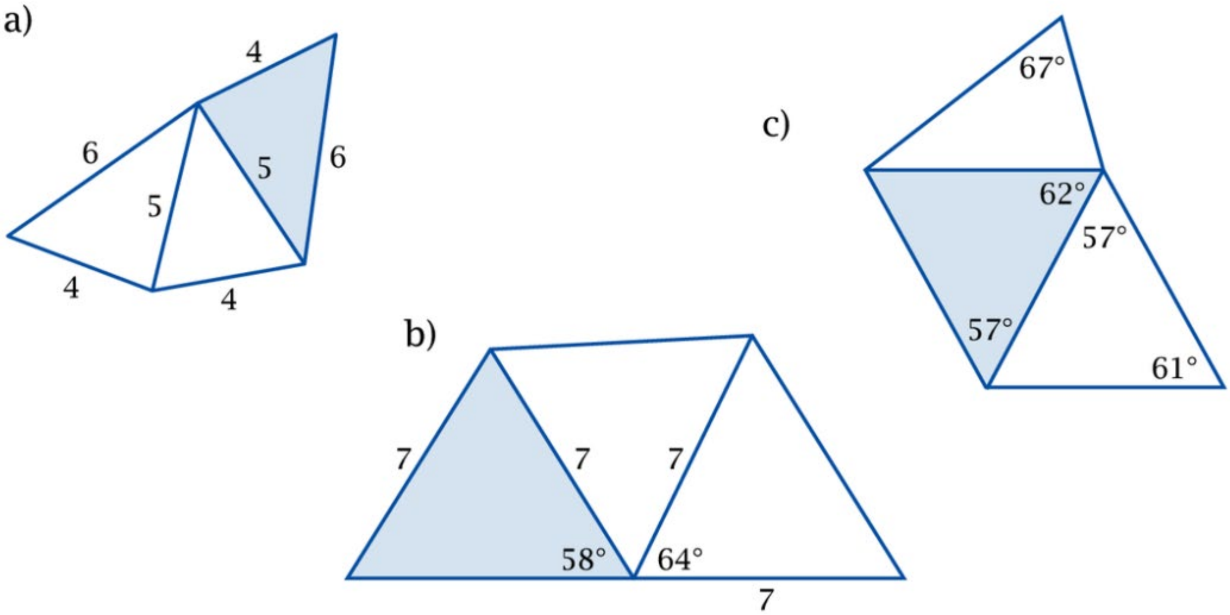
Zad.8. Który z narysowanych trójkątów jest przystający do trójkąta ABC ?



Zad.9. Czy narysowane trójkąty są przystające?

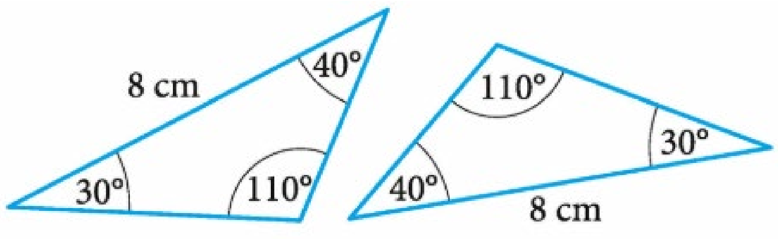


Zad.10. Znajdź na rysunku trójkąt przystający do zacieniowanego.



Zad.11. Czy z informacji podanych na rysunku wynika że trójkąty są przystające?

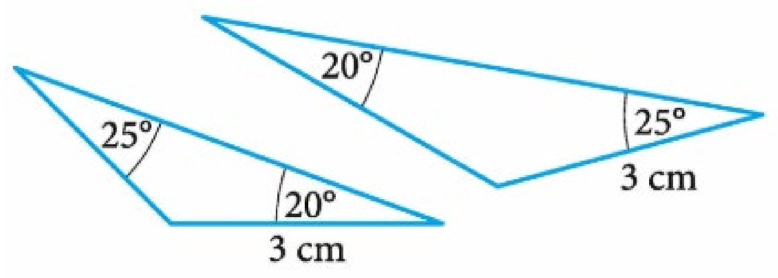
Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A-C.



T	Tak,	ponieważ	**A.**	na rysunku nie podano długości boków trójkąta.
			B.	trójkąty mają wszystkie kąty odpowiednio równe.
N	Nie,		**C.**	w obu trójkątach przy boku długości 8 cm są takie same kąty.

Zad.12. Czy z informacji podanych na rysunku wynika że trójkąty są przystające?

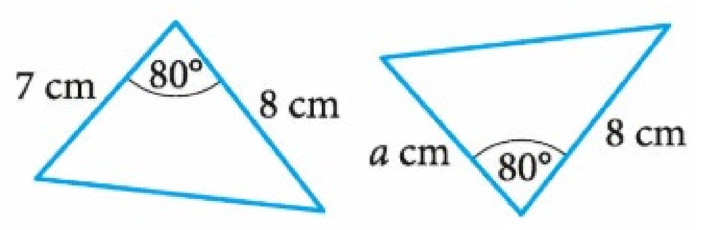
Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A-C.



T	Tak,	ponieważ	**A.**	w obu trójkątach można obliczyć trzeci kąt i w obu jest on taki sam.
			B.	w jednym z trójkątów bok długości 3 cm leży naprzeciwko kąta 20°, a w drugim naprzeciwko kąta 25°.
N	Nie,		**C.**	oba trójkąty są rozwartokątne.

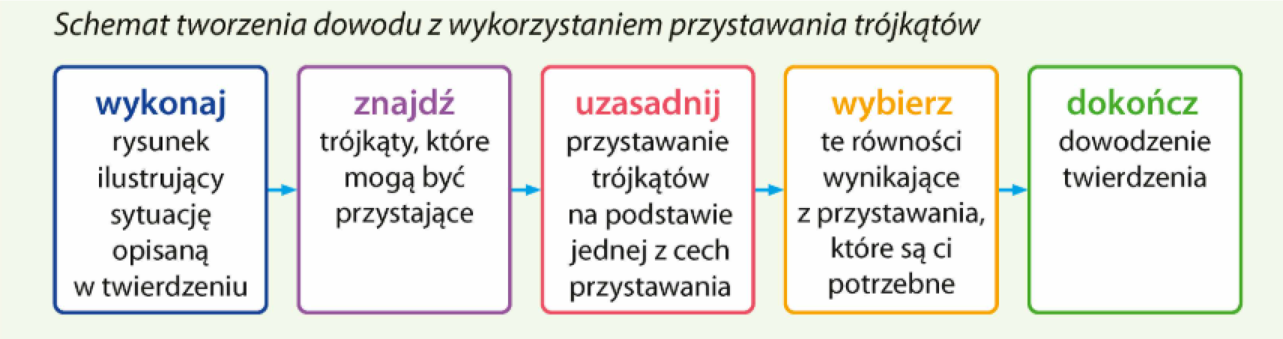
Zad.13. Czy z informacji podanych na rysunku wynika, że $a = 7$ cm?

Wybierz odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie spośród zdań A-C.



T	Tak,	ponieważ	**A.**	w obu trójkątach przy kącie 80° są takie same boki.
			B.	w obu trójkątach przy boku 8 cm są takie same kąty.
N	Nie,		**C.**	na rysunku jest za mało danych.

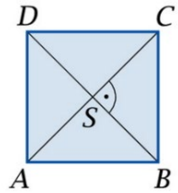
PRZYSTAWANIE TRÓJKĄTÓW W DOWODACH TWIERDZEŃ:



Zad.14. Udowodnij, że prosta dzieląca kąt między ramionami trójkąta równoramiennego na połowy dzieli ten trójkąt na dwa mniejsze trójkąty przystające.

CZWOROKĄTY:

Kwadrat jest figurą foremną (ma równe boki i równe kąty). Przekątne kwadratu są prostopadłe, równej długości, przecinają się w połowie i dzielą kąty proste na połowy.



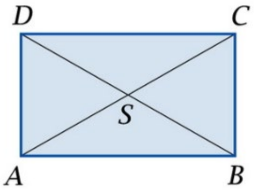
$AC \perp BD$

$AC = BD$

$AS = SC$

$BS = SD$

Prostokąt ma boki parami równe. Wszystkie kąty są równe. Przekątne są równej długości i przecinają się w połowie.

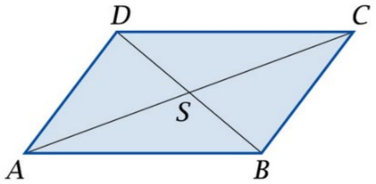


$AC = BD$

$AS = SC$

$BS = SD$

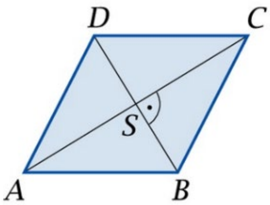
Równoległobok ma przeciwległe boki parami równe i przeciwległe kąty parami równe. Przekątne przecinają się w połowie.



$AS = SC$

$BS = SD$

Romb ma boki równe i przeciwległe kąty parami równe. Przekątne są prostopadłe, przecinają się w połowie i dzielą kąty rombu na połowy.

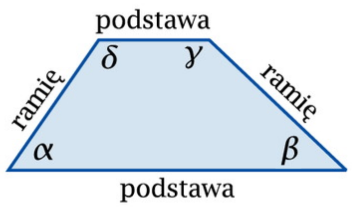


$AC \perp BD$

$AS = SC$

$BS = SD$

Trapez to czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych. Trapez o równych ramionach to trapez równoramienny. Trapez, który ma co najmniej jeden kąt prosty, to trapez prostokątny.



$\alpha + \delta = 180°$

$\beta + \gamma = 180°$

Suma miar kątów leżących przy tym samym ramieniu trapezu jest równa 180°.

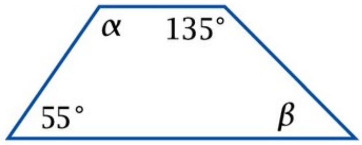
<u>Suma miar kątów w każdym czworokącie to 360°</u>.

Pamiętaj:

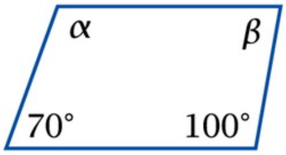
- przekątne przecinają się w połowie w każdym równoległoboku, więc w: kwadracie, prostokącie, rombie i równoległoboku
- przekątne są prostopadłe i dzielą kąty wewnętrzne na połowy w kwadracie i w rombie
- przekątne są równej długości w prostokącie i w kwadracie

Zad.15. Narysowane poniżej czworokąty to trapezy. Oblicz miary kątów α i β.

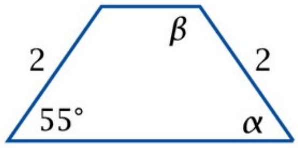
a)



b)



c)



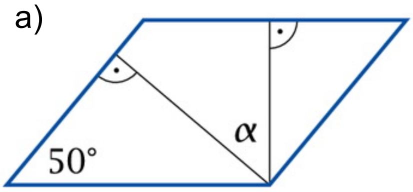
Zad.16. Oblicz miary kątów równoległoboków narysowanych poniżej.

a)

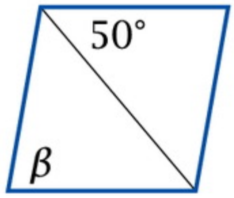
b)

Zad.17. Narysowane czworokąty to równoległobok, romb i prostokąt. Oblicz miary kątów α, β, γ.

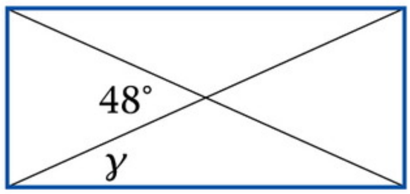
a)



b)

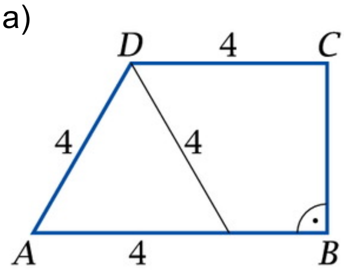


c)

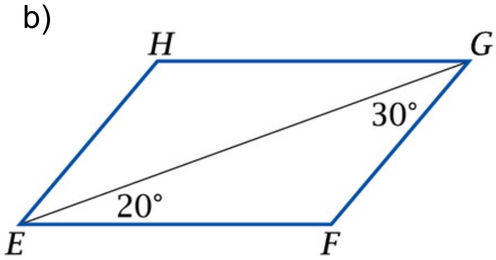


Zad.18. Narysowane czworokąty to trapez i dwa równoległoboki. Oblicz miary kątów tych figur.

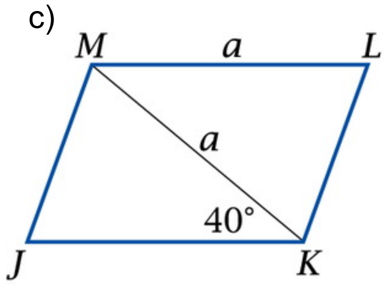
a)



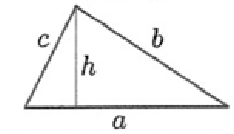
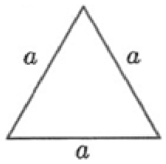
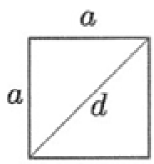
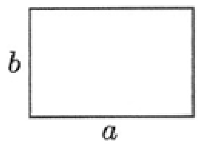
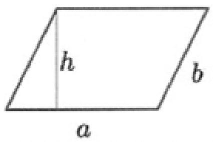
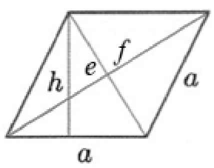
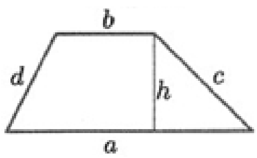
b)



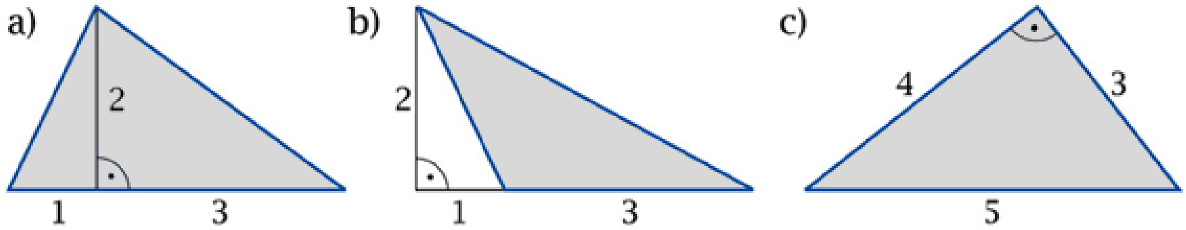
c)



POLA I OBWODY WIELOKĄTÓW:

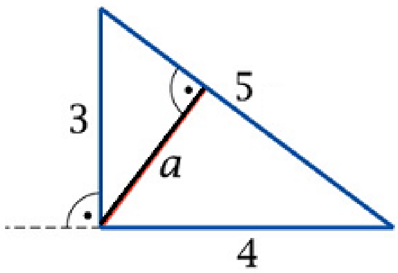
	Pole	Obwód
trójkąt 	$P = \dfrac{a \cdot h}{2}$	$Ob = a + b + c$
trójkąt równoboczny 	* $P = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ * $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	$Ob = 3 \cdot a$
kwadrat 	$P = a^2$ $P = \dfrac{d \cdot d}{2}$ * $d = a\sqrt{2}$	$Ob = 4 \cdot a$
prostokąt 	$P = a \cdot b$	$Ob = 2 \cdot a + 2 \cdot b$
równoległobok 	$P = a \cdot h$	$Ob = 2 \cdot a + 2 \cdot b$
romb 	$P = a \cdot h$ $P = \dfrac{e \cdot f}{2}$	$Ob = 4 \cdot a$
trapez 	$P = \dfrac{(a + b) \cdot h}{2}$	$Ob = a + b + c + d$

Zad.19. Oblicz pola zacieniowanych trójkątów.

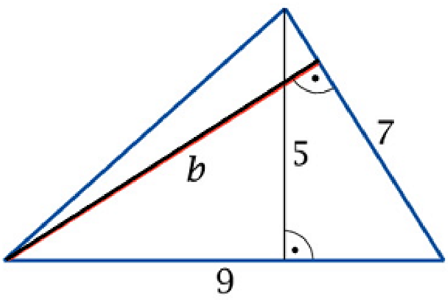


Zad.20. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

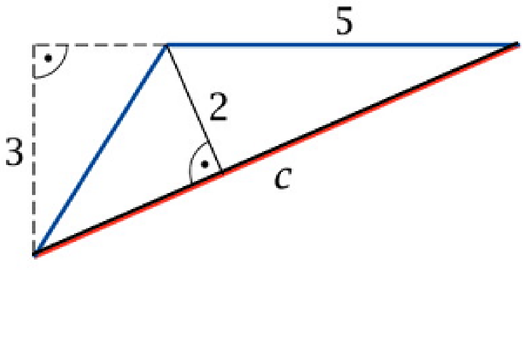
a)



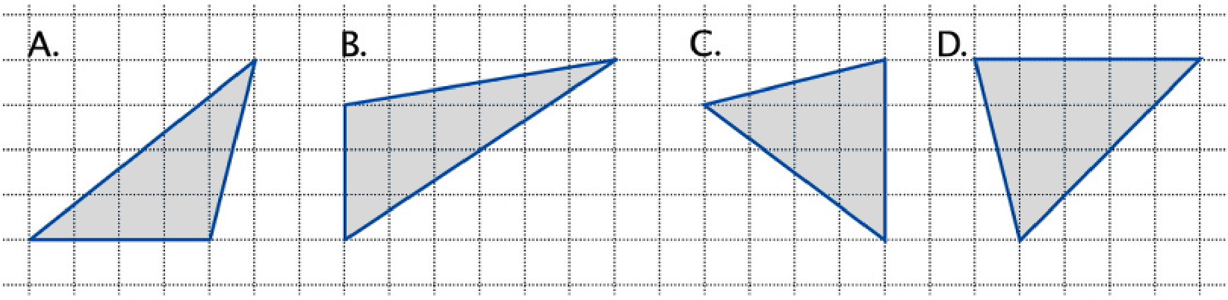
b)



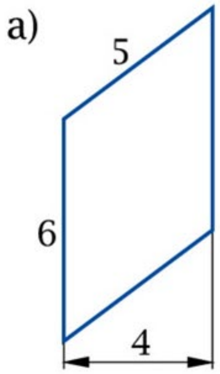
c)

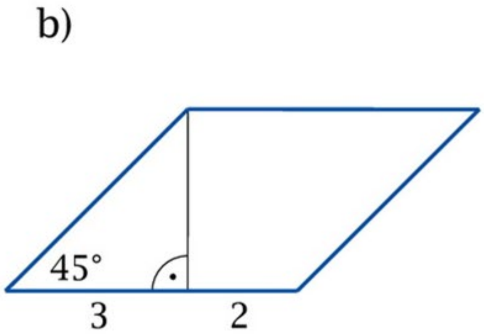


Zad.21. Oblicz pola narysowanych trójkątów.

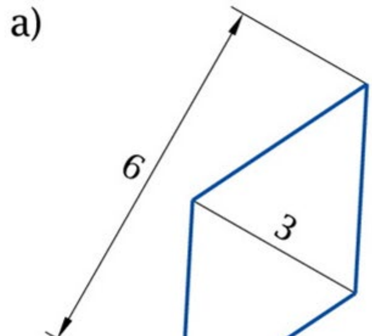


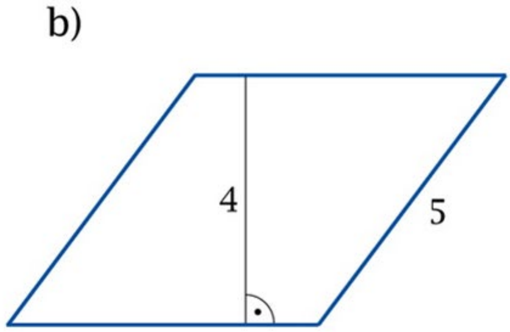
Zad.22. Oblicz pola narysowanych równoległoboków.



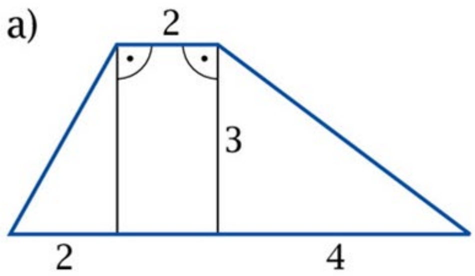


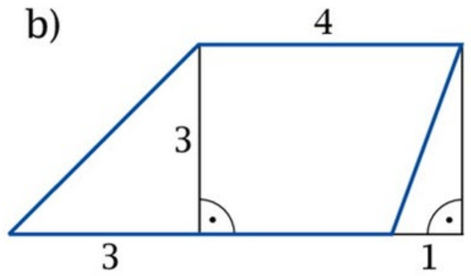
Zad.23. Oblicz pola narysowanych rombów.



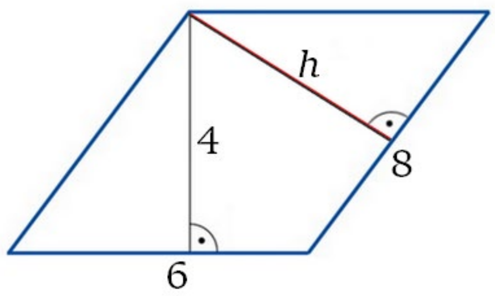


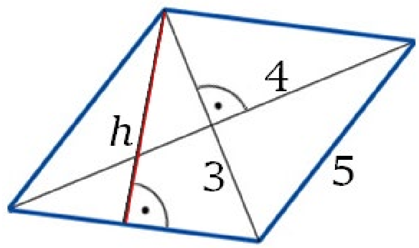
Zad.24. Oblicz pola narysowanych trapezów.





Zad.25. W narysowanych równoległobokach oblicz długości odcinków oznaczonych literami.





JEDNOSTKI POWIERZCHNI:

Zależności między jednostkami powierzchni wynikają z zależności między jednostkami długości:

1 km = 1000 m   więc   1 $km^2 = (1000\ m)^2 = 1\ 000\ 000\ m^2$

1 m = 100 cm   więc   1 $m^2 = (100\ cm)^2 = 10\ 000\ cm^2$

1 dm = 10 cm   więc   1 $dm^2 = (10\ cm)^2 = 100\ cm^2$

1 cm = 10 mm   więc   1 $cm^2 = (10\ mm)^2 = 100\ mm^2$

Powierzchnię działek, pól, lasów często przedstawia się w arach i hektarach:

1 a = 100 m^2

1 ha = 100 a = 10 000 m^2

$$\boxed{m^2} \xrightarrow{\cdot 100} \boxed{a} \xrightarrow{\cdot 100} \boxed{ha} \xrightarrow{\cdot 100} \boxed{km^2}$$

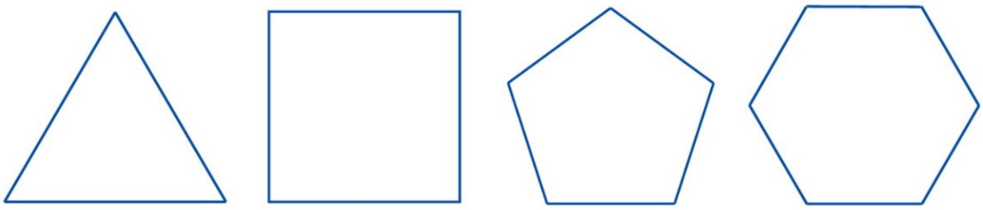
Zad.26. Wyraź podane powierzchnie we wskazanej jednostce.

a) 3 dm^2 = ... cm^2 c) 5 cm^2 = ... dm^2 e) 3 ha = ... a

b) 2 km^2 = ... m^2 d) 7 cm^2 = ... m^2 f) 700 m^2 = ... a

WIELOKĄTY FOREMNE:

Wielokąty, które mają wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe, są **foremne,** np.:



trójkąt foremny | czworokąt foremny | pięciokąt foremny | sześciokąt foremny

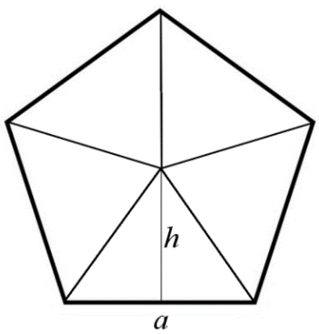
<u>kąt wewnętrzny</u>:

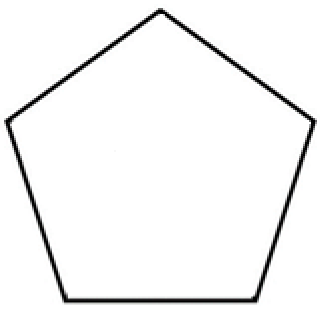
$$180° - \frac{360}{n}$$

<u>liczba przekątnych</u>:

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

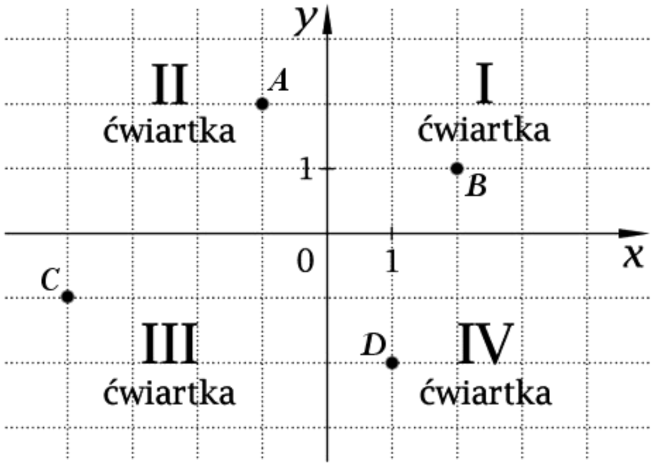
Zad.27. Pięciokąt foremny jest zbudowany z pięciu jednakowych trójkątów równoramiennych. Oblicz pole i obwód pięciokąta foremnego jeśli każdy z takich trójkątów ma podstawę $a = 6$ i wysokość $h = 4$ (patrz rysunek). Podaj miarę kąta wewnętrznego i liczbę przekątnych pięciokąta foremnego.





PUNKTY W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH:

Za pomocą liczb, można określać położenie punktów na płaszczyźnie. Potrzebne są do tego dwie osie tworzące **układ współrzędnych**.



Punkt przecięcia osi nazywamy **początkiem układu współrzędnych**.

Położenie każdego punktu na płaszczyźnie określają dwie liczby, zwane **współrzędnymi** punktu (x, y).

Pierwsza x jest odczytywana na osi poziomej, druga y jest odczytywana na osi pionowej.

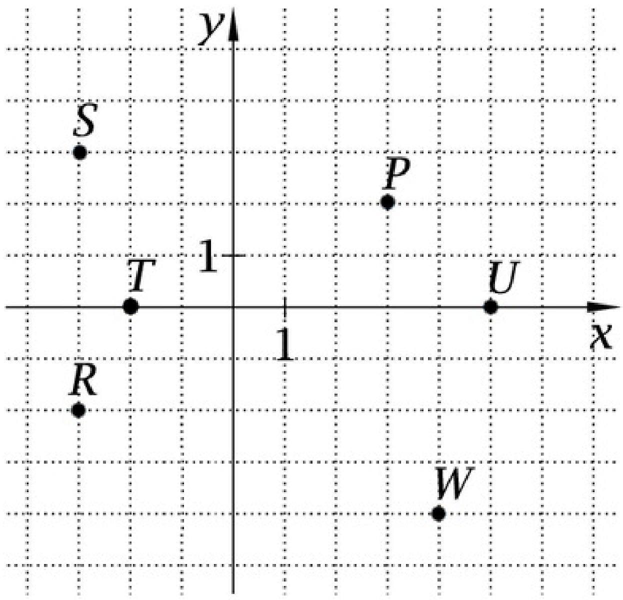
$A = (-1, 2)$ $B = (2, 1)$,

$C = (-4, -1)$ $D = (1, -2)$

Osie dzielą układ współrzędnych na 4 części, nazywane **ćwiartkami**.

Zadanie 28.

Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na rysunku.



Zadanie 29.

Zaznacz w układzie współrzędnych następujące punkty:

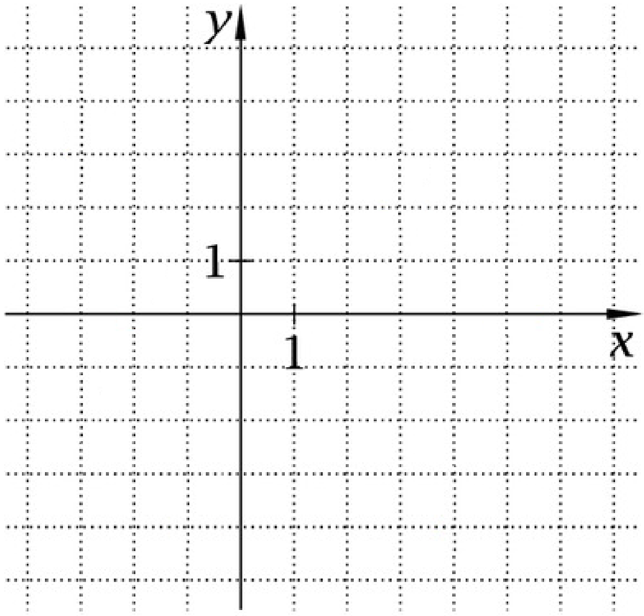
$A = (-2, 3)$

$B = (0, 2)$

$C = (4, -3)$

$D = (-2, -3)$

$E = (5, 0)$



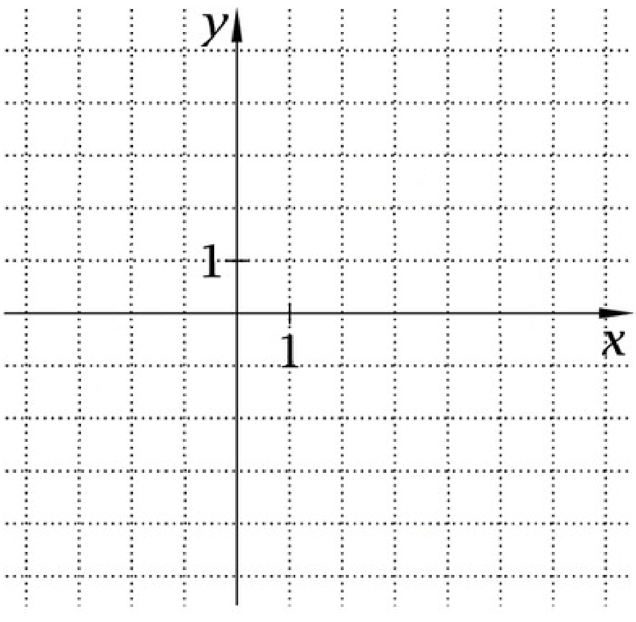
Zadanie 30.

Punkty A, B i C są wierzchołkami pewnego prostokąta. Jakie współrzędne ma czwarty wierzchołek? Oblicz obwód i pole otrzymanego prostokąta.

$A = (-3, -2)$

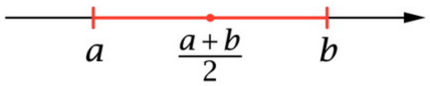
$B = (4, -2)$

$C = (4, 3)$

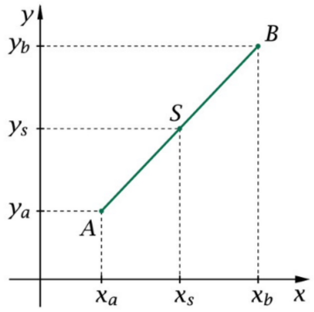


ŚRODEK ODCINKA W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH:

Na osi liczbowej środek odcinka wyznaczonego przez dwie liczby ma współrzędną równą ich średniej arytmetycznej.



Podobnie współrzędne środka odcinka w układzie współrzędnych są średnimi arytmetycznymi współrzędnych jego końców.



$$\boxed{x_s = \frac{x_a + x_b}{2}, \quad y_s = \frac{y_a + y_b}{2}}$$

Zad.31. Wyznacz współrzędne środka odcinka o podanych końcach:

$A = (7, 11), \quad B = (13, 3)$

Zad.32. Punkt S jest środkiem odcinka AB. Oblicz jakie współrzędne ma punkt B, gdy:

$A = (4,\ 9), \ S = (8,\ 12)$