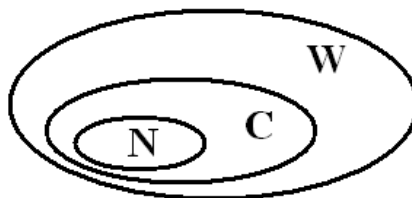


# I. LICZBY i DZIAŁANIA



## ZBIORY LICZBOWE:

**liczby naturalne:** to liczby całkowite dodatnie wraz z zerem np. 0, 1, 2, 3, 4, 5

**liczby całkowite:** to liczby naturalne oraz ich ujemne odpowiedniki, a także liczba zero  
np. -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4

**liczby wymierne:** można przedstawić za pomocą ułamka zwykłego  
np. -3;  $-2\frac{1}{4}$ ;  $-\frac{1}{3}$ ; 0; 3,14

Istnieją liczby, których nie można przedstawić za pomocą ilorazu dwóch liczb. Przykładem takich liczb są pierwiastki liczb całkowitych, które nie są kwadratami, np.  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{6}$  itd. Takie liczby **nie są wymierne**.

**liczby pierwsze:** to liczby naturalne większe od 1, posiadające tylko dwa dzielniki (czyli dzielą się tylko przez 1 i przez samą siebie), np. 2, 3, 5, 7, 11, ...

**liczby złożone:** to liczby naturalne większe od 1, które mają więcej niż dwa dzielniki, np. 4, 6, 8, 9, ...

*Zauważ:*

liczba 0 oraz liczba 1 nie jest ani pierwsza, ani złożona

**liczby przeciwne:** mają tę samą wartość, ale przeciwny znak (ich suma wynosi 0)  
np. 2 i -2

**liczby odwrotne:** zapisane za pomocą ułamka zwykłego niewłaściwego mają zamieniony względem siebie licznik z mianownikiem (ich iloczyn jest równy 1)  
np.  $\frac{2}{3}$  i  $\frac{3}{2}$  albo  $3$  i  $\frac{1}{3}$

Zad.1. Określ do jakiego zbioru należą podane poniżej liczby.

(wpisz: naturalne  $N$ , całkowite  $C$ , wymierne  $W$ , niewymierne  $NW$ )

3 : .....  $-\frac{8}{4}$  : .....  $\sqrt{4}$  : .....

-2 : ..... 1, (7) : .....  $\sqrt[3]{8}$  : .....

$-1\frac{2}{3}$  : .....  $\sqrt{3}$  : .....



Zad.3. Zapisz jakie to liczby:

- |                |                 |
|----------------|-----------------|
| a) XVII .....  | d) CDLXI .....  |
| b) XLII .....  | e) MCMXIV ..... |
| c) LXXIV ..... | f) MMCDLV ..... |

Zad.4. Zapisz podane liczby znakami rzymskimi:

- |              |              |               |
|--------------|--------------|---------------|
| a) 48 .....  | c) 467 ..... | e) 1410 ..... |
| b) 154 ..... | d) 896 ..... | f) 2018 ..... |

### CECHY PODZIELNOŚCI LICZB:

Liczba naturalna jest podzielna przez:

- 2 – gdy jest liczbą parzystą, gdy jej ostatnią cyfrą jest: 0, 2, 4, 6, 8 (np. 374)
- 3 – gdy suma jej cyfr dzieli się przez 3 (np. 483)
- 4 – gdy liczba utworzona z jej dwóch ostatnich cyfr dzieli się przez 4 (np. 712)
- 5 – gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5 (np. 105)
- 9 – gdy jej suma cyfr dzieli się przez 9 (np. 234)
- 10 – gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 (np. 230)

\* zauważ, że liczba naturalna jest podzielna przez

- 6 – gdy jest podzielna przez 2 i 3 (np. 228)
- 12 – gdy jest podzielna przez 3 i 4 (np. 432)
- 15 – gdy jest podzielna przez 3 i 5 (np. 765) itd.

Zad.5. Wśród liczb 351, 465, 512, 740 wybierz wszystkie te, które są podzielne przez:

- |             |             |               |
|-------------|-------------|---------------|
| a) :2 ..... | c) :4 ..... | e) :9 .....   |
| b) :3 ..... | d) :5 ..... | f)* :15 ..... |

## WIELOKROTNOŚCI I DZIELNIKI:

Każdą liczbę naturalną możemy pomnożyć przez inną liczbę naturalną i taki iloczyn to wielokrotność, np. wielokrotności liczby 8 to: 0, 8, 16, 24, itd.

Każda liczba naturalna, przez którą dzieli się bez reszty dana liczba to dzielnik danej liczby, np. dzielniki liczby 8 to: 1, 2, 4, 8.

NWD to największy wspólny dzielnik dwóch lub więcej liczb naturalnych [korzystamy z niego np. przy skracaniu ułamków].

NWW to najmniejsza wspólna wielokrotność dwóch lub więcej liczb naturalnych [korzystamy z niej np. przy wyznaczaniu wspólnego mianownika].

np.

NWD (12, 18) = 6      6 to największa liczba, przez którą podzieli się 12 i 18  
to przez 6 skrócimy ułamek  $\frac{12}{18}$

NWW (12, 18) = 36      36 to najmniejsza liczba, która podzieli się przez 12 i 18  
to 36 będzie wspólnym mianownikiem dla  $\frac{1}{12}$  i  $\frac{1}{18}$

Obliczając NWD i NWW możemy posłużyć się rozkładem na czynniki pierwsze. Szukając NWD (84, 126) i NWW (84, 126) wykonujemy:

*rozkładamy liczby  
na czynniki pierwsze*

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \quad 126 & 2 \\ 42 & 2 \quad 63 & 3 \\ 21 & 3 \quad 21 & 3 \\ 7 & 7 \quad 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

*zaznaczamy  
powtarzające się czynniki*

$$84 = \textcircled{2} \cdot 2 \cdot \textcircled{3} \cdot \textcircled{7}$$
$$126 = \textcircled{2} \cdot 3 \cdot \textcircled{3} \cdot \textcircled{7}$$

*obliczamy  
NWD i NWW*

$$\text{NWD}(84, 126) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

$$\text{NWW}(84, 126) = 2 \cdot 126 = 252$$

lub  $= 3 \cdot 84 = 252$

Zad.6. Wyznacz:

a) NWD (8, 12) = .....      c) NWD (3, 7) = .....      e) NWW (7, 14) = .....

b) NWD (5, 10) = .....      d) NWW (3, 7) = .....      f) NWW (6, 8) = .....

g) NWD (330, 420) = .....

h) NWW (330, 420) = .....

Zad.7. Ile dzielników ma liczba 36?

Zad.8. Listewkę o długości 50 cm planowano pociąć na równe części. Iwona zaproponowała podział na kawałki po 5 cm i zaznaczyła na listewce czerwonym kolorem linie cięcia. Agata chciała podzielić tę samą listewkę na części po 2 cm i linie cięcia zaznaczyła na zielono. Ile razy linia czerwona pokrywała się z linią zieloną?

### **DZIELENIE Z RESZTĄ:**

$$a : b = w \text{ reszta } r, \text{ jeżeli } a = b \cdot w + r$$

Reszta jest zawsze mniejsza od dzielnika.

Zad.9. Wykonaj dzielenie z resztą i zrób sprawdzenie otrzymanego wyniku:

$$25 : 7 =$$

bo

Zad.10. Znajdź liczby oznaczone literami

a)  $a : 12 = 5$  reszta 9

b)  $163 : b = 5$  reszta 13

### **WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA:**

Wartość bezwzględna z liczby nieujemnej, to ta sama liczba, np.  $|3| = 3$ ,  $|0| = 0$ .

Wartość bezwzględna z liczby ujemnej, to liczba do niej przeciwna, np.  $|-3| = 3$ .

Zad.11. Oblicz:

a)  $|-4| + |3| =$

b)  $2 \cdot |-3| - |-2| =$

### **ZAOKRĄGLANIE LICZB:**

Zaokrąglanie liczb polega na:

- ▶ wskazaniu cyfry, względem której określane jest zaokrąglenie,
- ▶ zastąpieniu zerami wszystkich cyfr na prawo od wskazanej,
- ▶ zwiększeniu wskazanej cyfry o jeden, jeśli sąsiednia z prawej cyfra była większa lub równa 5.

np. zaokrąglimy daną liczbę

- do całości (liczby całkowitej):  $7,68 \approx 8$                        $31,23 \approx 31$
- do 0,01 (części setnych):  $0,6378 \approx 0,64$                        $0,952 \approx 0,95$
- do 100 (pełnych setek):  $181,457 \approx 200$                        $5691 \approx 5700$                        $31 \approx 0$

Zad.12. Zaokrąglij daną liczbę do całości:

a)  $5,72 \approx$

b)  $1,29 \approx$

c)  $13,7 \approx$

Zad.13. Zaokrąglij daną liczbę do 0,01 (części setnych):

a)  $0,5281 \approx$

b)  $4,851 \approx$

c)  $5,63 \approx$

Zad.14. Zaokrąglij daną liczbę do pełnych setek:

a)  $273,387 \approx$

c)  $51 \approx$

b)  $7483 \approx$

d)  $48 \approx$

## DZIAŁANIA NA LICZBACH:

Dodawanie to SUMA, a dodajemy SKŁADNIKI.

Mnożenie to ILOCZYN, a mnożymy CZYNNIKI.

Odejmowanie to RÓŻNICA, od ODJEMNEJ odejmujemy ODJEMNIK.

Dzielenie to ILORAZ, dzielimy DZIELNĄ przez DZIELNIK.

Druga potęga liczby to KWADRAT tej liczby, a trzecia to SZEŚCIAN.

## KOLEJNOŚĆ WYKONYWANIA DZIAŁAŃ:

W pierwszej kolejności wykonujemy działania w nawiasach, a potem:

- potęgowanie i pierwiastkowanie
- mnożenie i dzielenie
- dodawanie i odejmowanie

W wyrażeniach, w których występuje wyłącznie dzielenie, bądź dzielenie z mnożeniem, działania wykonujemy w kolejności występowania (od lewej do prawej). Podobnie z odejmowaniem i odejmowaniem z dodawaniem.

np.  $6 : 2 \cdot 3 = 9$  (a nie 1)

Zad.15. Oblicz:

a)  $12 - 3 \cdot 2^2 =$

c)  $12 : 3 \cdot 4 =$

b)  $10 - (-2)^2 =$

d)  $19 + 1 - 17 + 3 =$

## DZIAŁANIA NA UŁAMKACH ZWYKŁYCH:

Ułamek właściwy ma licznik mniejszy od mianownika, np.  $\frac{2}{3}$ .

Ułamek niewłaściwy

ma licznik większy od mianownika, można go zamienić na liczbę mieszaną, np.  $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

Aby dodać lub odjąć ułamki zwykłe, należy sprowadzić je do wspólnego mianownika, a następnie wykonać działania na licznikach, zaś mianownik pozostawić bez zmian.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8+3}{12} = \frac{11}{12}$$

Aby pomnożyć ułamki zwykłe, należy wcześniej ułamki mieszane zamienić na niewłaściwe, a następnie pomnożyć liczniki i mianowniki.

$$2\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{36}{20} = 1\frac{16}{20} = 1\frac{4}{5}$$

Aby podzielić ułamki zwykłe, należy wcześniej ułamki mieszane zamienić na niewłaściwe, a następnie pomnożyć dzielącą przez odwrotność dzielnika.

$$1\frac{2}{5} : 1\frac{1}{3} = \frac{7}{5} : \frac{4}{3} = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$$

Uwaga: skracać można tylko licznik z mianownikiem w tym samym ułamku lub „na krzyż” w mnożeniu.

Zad.16. Oblicz:

a)  $\frac{3}{7} + 3\frac{1}{3} =$

c)  $1\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} =$

b)  $4\frac{1}{7} - 1\frac{5}{7} =$

d)  $2\frac{2}{3} : 1\frac{2}{9} =$

Zad.17. Oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{\frac{5}{7} - \frac{2}{7} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}{4} =$$

## **DZIAŁANIA NA UŁAMKACH DZIESIĘTNYCH:**

Dodając i odejmując pisemnie ułamki dziesiętne pamiętajmy, by przecinki były jeden pod drugim.

W mnożeniu sumujemy ilość miejsc po przecinku.

$$0,03 \cdot 0,2 = 0,006$$

W dzieleniu przesuwamy przecinki w dzielnej i dzielniku o tyle samo miejsc, by dzielnik był liczbą całkowitą.

$$1,2 : 0,06 = 120 : 6 = 20$$

Zad.18. Oblicz pisemnie:

a)  $135,6 + 8,71 =$

b)  $3000,4 - 6,52 =$

c)  $2,6 \cdot 4,15 =$

d)  $0,414 : 1,2 =$

### ROZWINIĘCIA DZIESIĘTNE LICZB:

Aby zamienić ułamek zwykły na dziesiętny, należy rozszerzyć go do ułamka o mianowniku 10, 100, 1000 itd. lub podzielić licznik przez mianownik.

$$\frac{13}{20} = \frac{13 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{65}{100} = 0,65 \quad \text{lub} \quad \frac{13}{20} = 13 : 20 = 0,65$$

Zad.19. Zapisz rozwinięcia dziesiętne liczb:

a)  $\frac{1}{4} =$

d)  $1\frac{3}{25} =$

g)\*  $4\frac{1}{3} =$

b)  $2\frac{3}{5} =$

e)  $6\frac{7}{50} =$

h)\*  $\frac{5}{6} =$

c)  $5\frac{7}{20} =$

f)  $\frac{3}{8} =$

## UŁAMEK LICZBY:

Aby obliczyć ułamek pewnej wielkości, można pomnożyć ten ułamek przez tę wielkość.

$$\frac{2}{3} \text{ liczby } 27 \text{ to } \frac{2}{3} \cdot 27 = 18$$

Zad.20. Tomek miał 9 zł. Na słodycze wydał  $\frac{3}{4}$  tej kwoty. Czyli ile zł wydał?

Zad.21. Jola dostała na urodziny 450 zł, ale zaraz wydała  $\frac{2}{5}$  tej kwoty. Ile zł jej zostało?

Zad.22. W butelce było 1,5 litra soku. Jarek wypił  $\frac{2}{3}$  zawartości butelki, a Ania  $\frac{3}{4}$  tego, co zostało. Ile litrów soku zostało na końcu w butelce?

Zad.23. Zmieszano 60 dag rodzynek w cenie 12 zł za kilogram, 70 dag pestek dyni w cenie 18 zł za kilogram oraz 20 dag orzechów w cenie 24 zł za kilogram. Ile kosztuje kilogram tej mieszanki?

Zad.24. Paweł powiedział, że podzieli tabliczkę czekolady w taki sposób, że bratu przypadnie  $\frac{1}{2}$  całej tabliczki, siostrze  $\frac{5}{12}$  całej tabliczki, a jemu  $\frac{1}{6}$  całej tabliczki. Czy taki podział tabliczki czekolady jest możliwy? Uzasadnij swoją odpowiedź.

### PORÓWNYWANIE UŁAMKÓW:

Ułamki zwykłe możemy łatwo porównać, jeśli mają wspólny licznik lub wspólny mianownik.

Gdy ułamki mają jednakowe mianowniki, większym będzie ten, który ma większy licznik:

$$\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$$

Gdy ułamki mają jednakowe liczniki, większym będzie ten, który ma mniejszy mianownik:

$$\frac{5}{7} > \frac{5}{9}$$

Ułamki dziesiętne łatwo porównać, jeśli mają identyczną liczbę miejsc po przecinku. Możemy doprowadzić do tego dopisując odpowiednią liczbę zer na końcu ułamka (po przecinku).

Ułamki zwykłe porównamy z dziesiętnymi zapisując ich rozwinięcia dziesiętne.

Zad.25. Porównaj liczby. W miejsce kropek wstaw odpowiedni znak:  $\boxed{>}$ ,  $\boxed{<}$ ,  $\boxed{=}$ .

a)  $3\frac{5}{7}$  .....  $2\frac{8}{9}$

c)  $\frac{2}{3}$  .....  $\frac{4}{7}$

e)  $\frac{5}{7}$  ..... 0,73

b)  $\frac{3}{4}$  .....  $\frac{7}{8}$

d) 0,35 ..... 0,7

f)\*  $\frac{1}{3}$  ..... 0,(3)

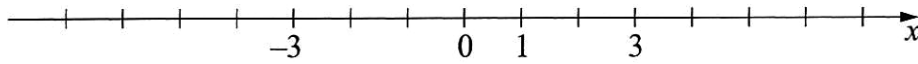
Zad.26. Wstaw odpowiedni ułamek, aby spełnione zostały nierówności.

a)  $\frac{3}{7} < \boxed{\phantom{00}} < \frac{4}{7}$

b)  $\frac{5}{9} < \boxed{\phantom{00}} < \frac{5}{8}$

## OŚ LICZBOWA:

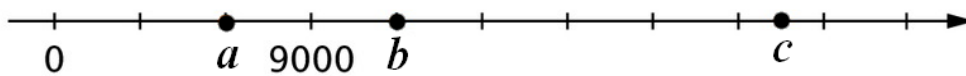
Oś liczbowa podzielona jest na odcinki równej długości. Każdemu punktowi na osi liczbowej przyporządkowana jest liczba, zwana jego współrzędną.



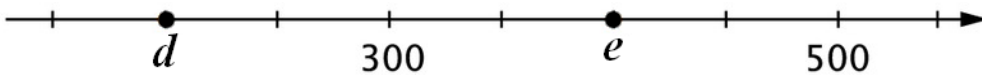
Znając współrzędne dwóch punktów i ilość odcinków je dzielących możemy określić podziałkę danej osi, czyli o ile zwiększa się liczba na osi co jeden odcinek.

Zad.27. Określ podziałkę i odczytaj, jakie liczby zaznaczono na osi liczbowej.

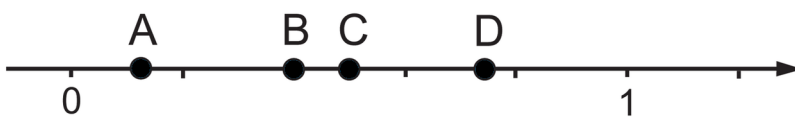
a)



b)



Zad.28. Dopasuj litery do odpowiednich ułamków:  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{5}$ .



Zad.29. Dopasuj litery do odpowiednich ułamków: 3,3; 3,25; 3,6; 3,5; 3,255.

