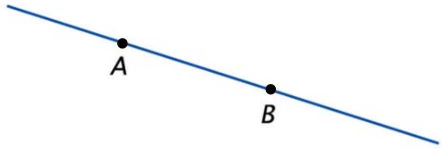
VI. GEOMETRIA PŁASKA

PROSTE I PÓŁPROSTE:

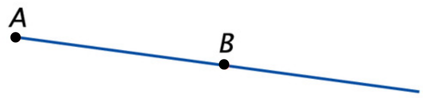
Prosta to linia o nieokreślonym początku i końcu. Prostą możemy oznaczyć małą literą, albo za pomocą dwóch dużych oznaczających dowolne dwa punkty należące do tej prostej (kolejność liter nie ma znaczenia).

prosta a

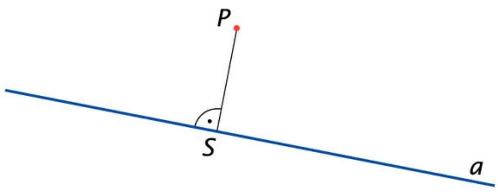


prosta AB

Półprosta jest równa połowie prostej, na której leży. Ma punkt początkowy, ale nie ma określonego końca. Półprostą oznaczamy za pomocą dwóch dużych liter. Pierwsza z tych liter oznacza początek półprostej (kolejność liter ma znaczenie).

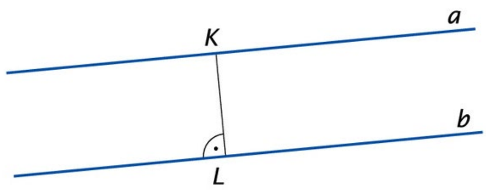


półprosta AB

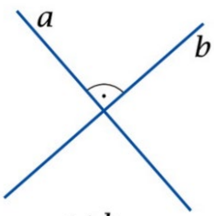


Odległość punktu od prostej jest to najmniejsza odległość między punktem P i prostą a. To długość odcinka PS prostopadłego do prostej a.

Odległość między prostymi równoległymi to długość najkrótszego odcinka łączącego te proste, czyli odcinka prostopadłego (odcinka KL).

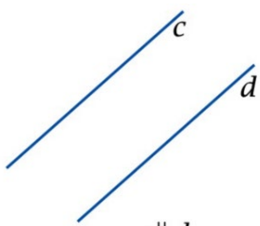


Proste prostopadłe $a \perp b$
przecinają się pod kątem prostym.



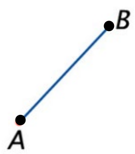
$a \perp b$

Proste równoległe $c \parallel d$
nie mają punktów wspólnych.

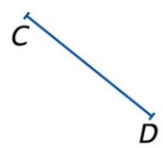


$c \parallel d$

Odcinek, to część prostej zawartej pomiędzy dwoma punktami. Każdy docinek ma dwa końce. Odcinek oznaczmy dużymi literami oznaczającymi jego końce.



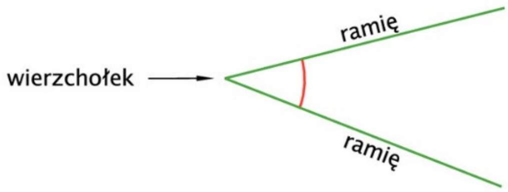
odcinek AB



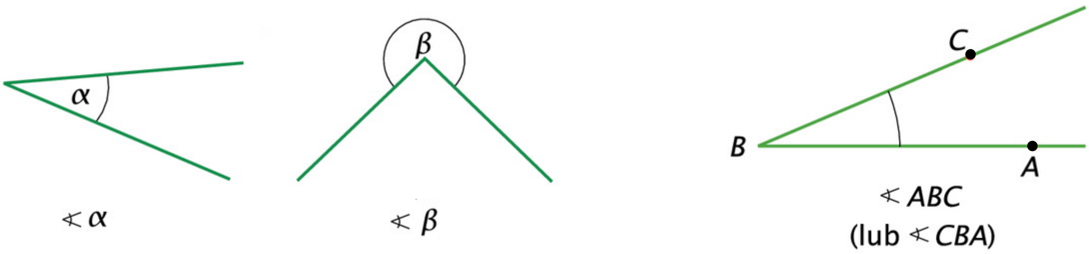
odcinek CD

KĄTY:

Kąt to część płaszczyzny wyznaczona przez dwie półproste o wspólnym początku.

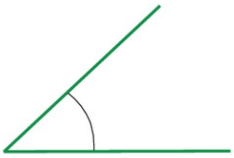


Kąty możemy oznaczać małymi literami alfabetu greckiego, np. α -alfa, β -beta, γ -gamma, δ -delta. Kąty też możemy oznaczać za pomocą trzech dużych liter, gdzie środkowa litera oznacza wierzchołek kąta.

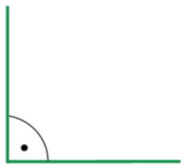


Rodzaje kątów:

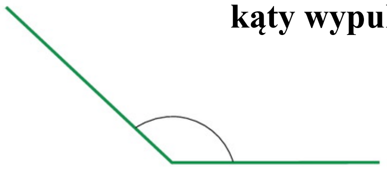
Kąt ostry, prosty i rozwarty to **kąty wypukłe**



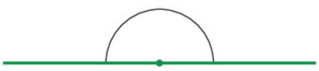
Kąt ostry
ma mniej niż 90°.



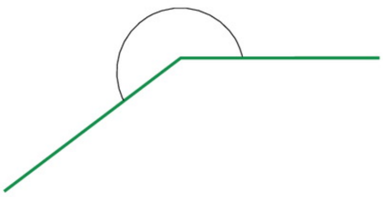
Kąt prosty
ma 90°.



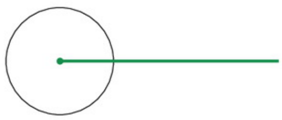
Kąt rozwarty
ma więcej niż 90° i mniej niż 180°.



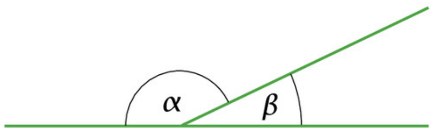
Kąt półpełny
ma 180°.



Kąt wklęsły
ma więcej niż 180° i mniej niż 360°.

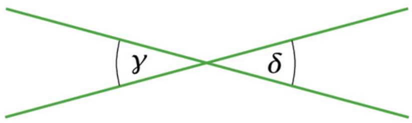


Kąt pełny
ma 360°.



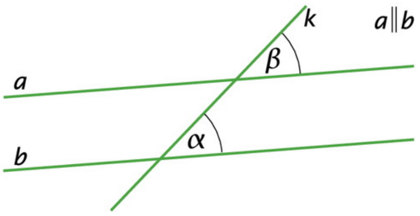
$\alpha + \beta = 180°$

To są kąty **przyległe**. Mają one wspólne ramię i razem tworzą kąt półpełny. Suma ich miar wynosi 180°.



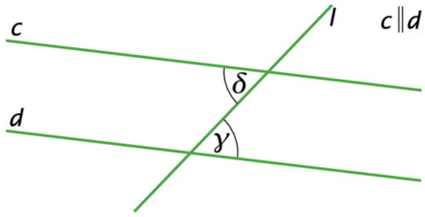
$\gamma = \delta$

To są kąty **wierzchołkowe**. Ich ramiona leżą na przecinających się prostych. Kąty te mają jednakowe miary.



$\alpha = \beta$

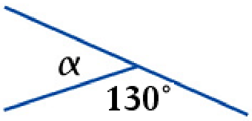
To są kąty **odpowiadające**. Utworzone zostały przez prostą *k* przecinającą proste równoległe *a* i *b*. Kąty te mają jednakowe miary.

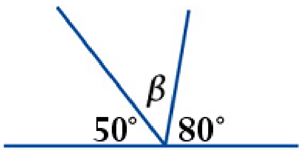


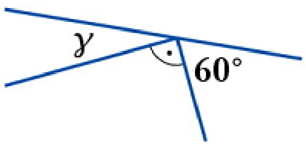
$\gamma = \delta$

To są kąty **naprzemianległe**. Utworzone zostały przez prostą *l* przecinającą proste równoległe *c* i *d*. Kąty te mają jednakowe miary.

Zad.1. Jakie miary mają kąty α , β i γ?

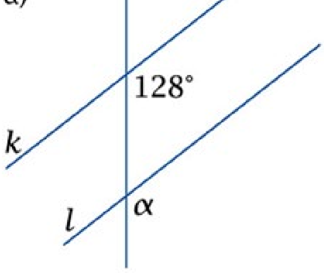




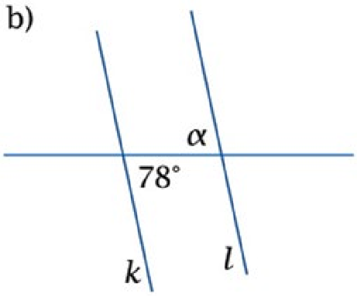


Zad.2. Na rysunkach proste k i l są równoległe. Oblicz miarę kąta α .

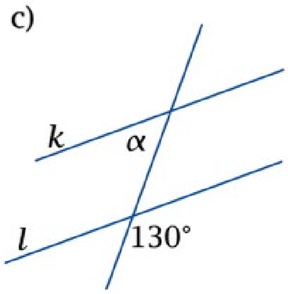
a)



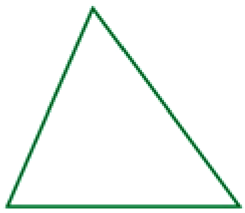
b)



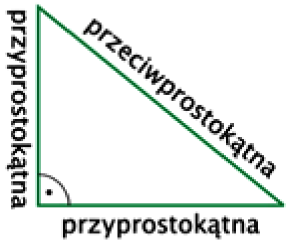
c)



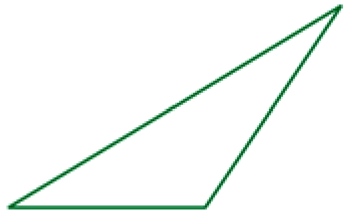
TRÓJKĄTY:



- **trójkąt ostrokątny** ma wszystkie kąty ostre

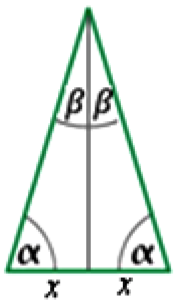


- **trójkąt prostokątny** ma jeden kąt prosty i dwa ostre

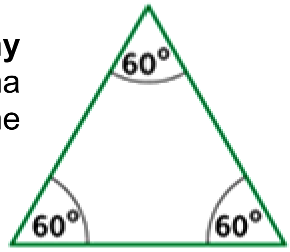


- **trójkąt rozwartokątny** ma jeden kąt rozwarty i dwa ostre

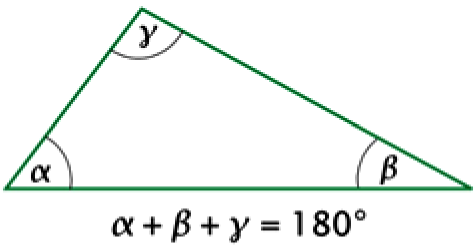
- w **trójkącie równoramiennym** kąty przy podstawie mają jednakowe miary, wysokość dzieli podstawę i kąt przy wierzchołku na połowy



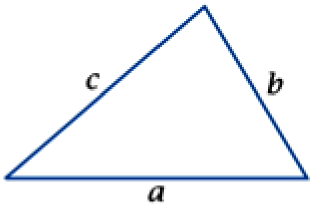
- **trójkąt równoboczny** jest foremny: ma równe boki i równe kąty po 60°



Suma kątów w trójkącie wynosi 180°



Warunek utworzenia trójkąta:



Każdy bok trójkąta ma długość mniejszą od sumy długości dwóch pozostałych boków.

$\boldsymbol{b+c>a} \quad \boldsymbol{a+c>b} \quad \boldsymbol{a+b>c}$

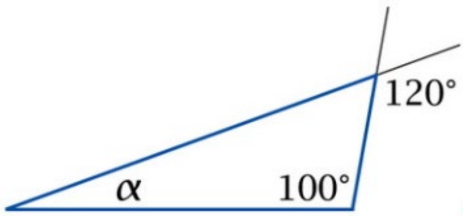
Aby stwierdzić czy z danych trzech odcinków można zbudować trójkąt, wystarczy sprawdzić, czy suma dwóch krótszych odcinków jest większa od najdłuższego.

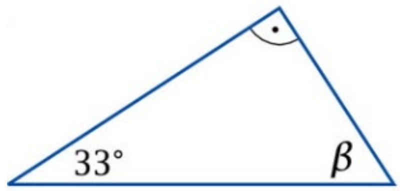
Zad.3. Czy boki trójkąta mogą mieć długość:

a) 3 cm, 4 cm, 5 cm

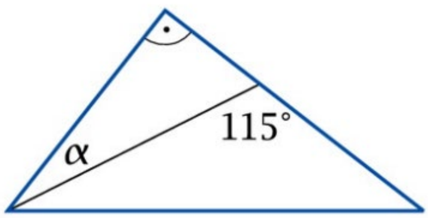
b) 1 cm, 2 cm, 3 cm

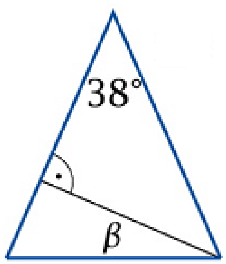
Zad.4. Jakie miary mają kąty α i β?

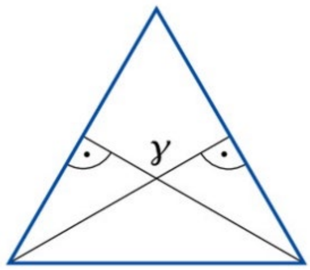




Zad.5. Narysowane trójkąty to trójkąt prostokątny, równoramienny i równoboczny. Oblicz miary kątów α, β, γ.

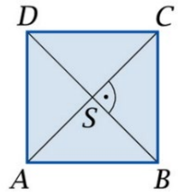






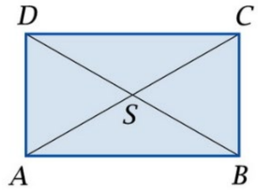
CZWOROKĄTY:

Kwadrat jest figurą foremną (ma równe boki i równe kąty). Przekątne kwadratu są prostopadłe, równej długości, przecinają się w połowie i dzielą kąty proste na połowy.



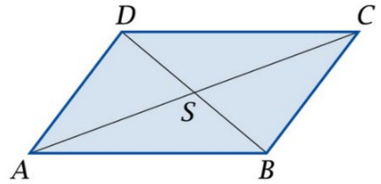
$AC \perp BD$
$AC = BD$
$AS = SC$
$BS = SD$

Prostokąt ma boki parami równe. Wszystkie kąty są równe. Przekątne są równej długości i przecinają się w połowie.



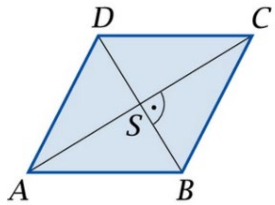
$AC = BD$
$AS = SC$
$BS = SD$

Równoległobok ma przeciwległe boki parami równe i przeciwległe kąty parami równe. Przekątne przecinają się w połowie.



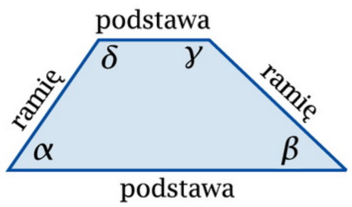
$AS = SC$
$BS = SD$

Romb ma boki równe i przeciwległe kąty parami równe. Przekątne są prostopadłe, przecinają się w połowie i dzielą kąty rombu na połowy.



$AC \perp BD$
$AS = SC$
$BS = SD$

Trapez to czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych. Trapez o równych ramionach to trapez równoramienny. Trapez, który ma co najmniej jeden kąt prosty, to trapez prostokątny.



$\alpha + \delta = 180°$
$\beta + \gamma = 180°$

Suma miar kątów leżących przy tym samym ramieniu trapezu jest równa 180°.

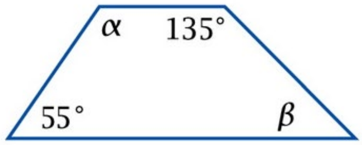
<u>**Suma miar kątów w każdym czworokącie to 360°**</u>**.**

Pamiętaj:

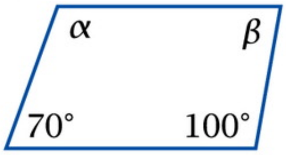
- przekątne przecinają się w połowie w każdym równoległoboku, więc w: kwadracie, prostokącie, rombie i równoległoboku
- przekątne są prostopadłe i dzielą kąty wewnętrzne na połowy w kwadracie i w rombie
- przekątne są równej długości w prostokącie i w kwadracie

Zad.6. Narysowane poniżej czworokąty to trapezy. Oblicz miary kątów α i β.

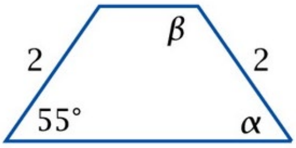
a)



b)



c)



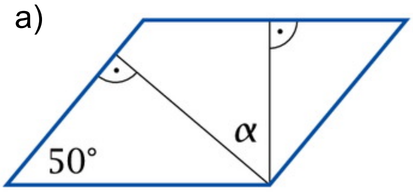
Zad.7. Oblicz miary kątów równoległoboków narysowanych poniżej.

a)

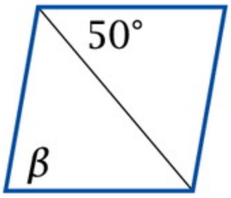
b)

Zad.8. Narysowane czworokąty to równoległobok, romb i prostokąt. Oblicz miary kątów α, β, γ.

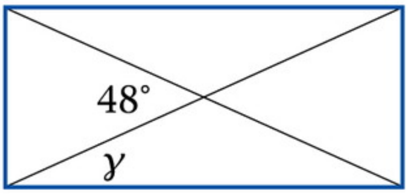
a)



b)

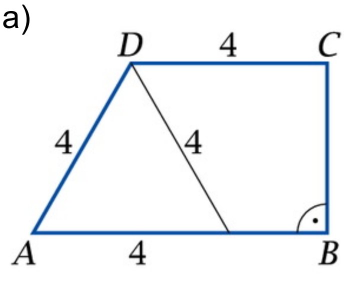


c)

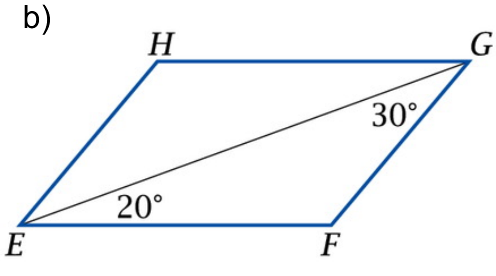


Zad.9. Narysowane czworokąty to trapez i dwa równoległoboki. Oblicz miary kątów tych figur.

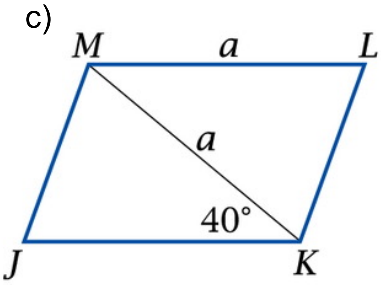
a)



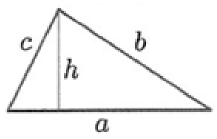
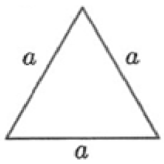
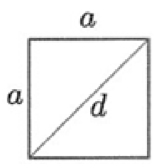
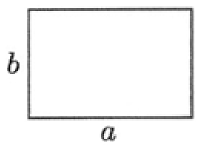
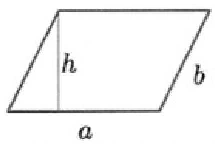
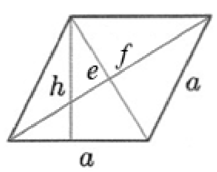
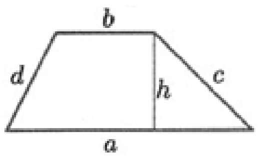
b)



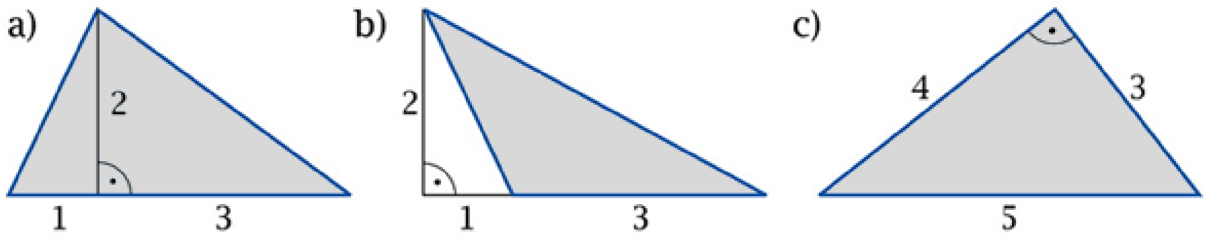
c)



POLA I OBWODY WIELOKĄTÓW:

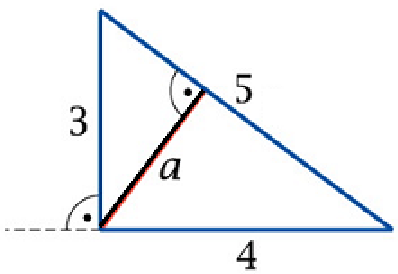
	Pole	Obwód
trójkąt 	$P = \frac{a \cdot h}{2}$	$Ob = a + b + c$
trójkąt równoboczny 	* $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ * $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	$Ob = 3 \cdot a$
kwadrat 	$P = a^2$ $P = \frac{d \cdot d}{2}$ * $d = a\sqrt{2}$	$Ob = 4 \cdot a$
prostokąt 	$P = a \cdot b$	$Ob = 2 \cdot a + 2 \cdot b$
równoległobok 	$P = a \cdot h$	$Ob = 2 \cdot a + 2 \cdot b$
romb 	$P = a \cdot h$ $P = \frac{e \cdot f}{2}$	$Ob = 4 \cdot a$
trapez 	$P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$	$Ob = a + b + c + d$

Zad.10. Oblicz pola zacieniowanych trójkątów.

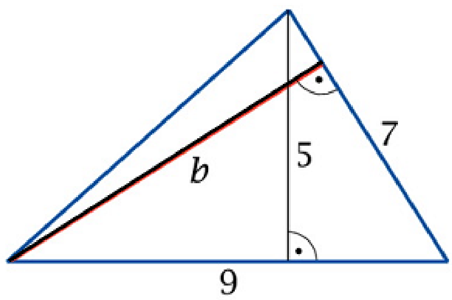


Zad.11. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

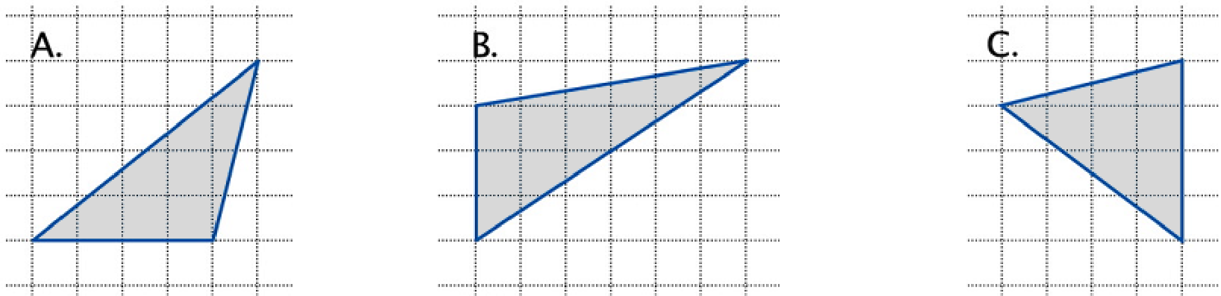
a)



b)

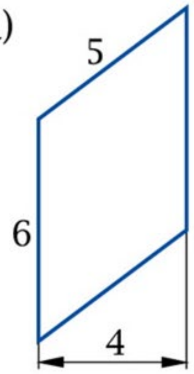


Zad.12. Oblicz pola narysowanych trójkątów.

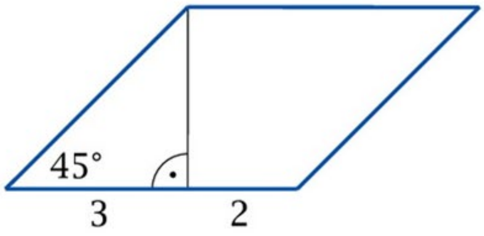


Zad.13. Oblicz pola narysowanych równoległoboków.

a)

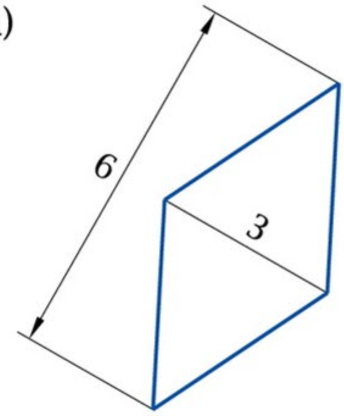


b)

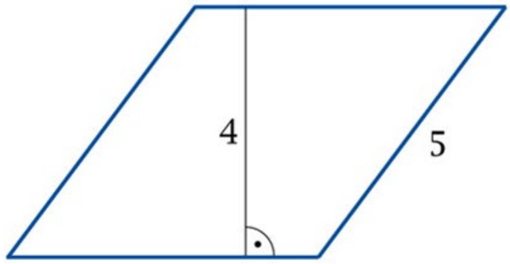


Zad.14. Oblicz pola narysowanych rombów.

a)

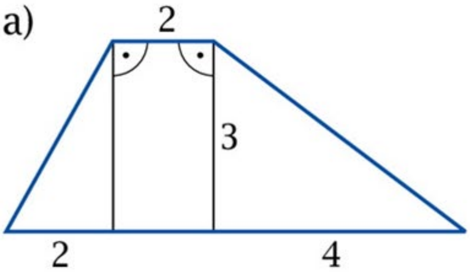


b)

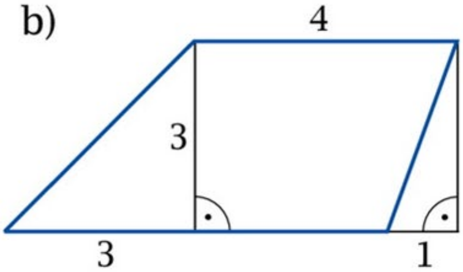


Zad.15. Oblicz pola narysowanych trapezów.

a)

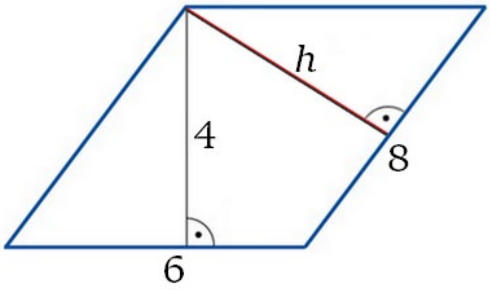


b)

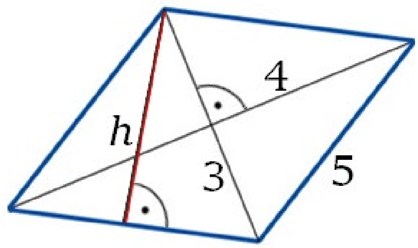


Zad.16. W narysowanych równoległobokach oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

a)



b)



JEDNOSTKI POWIERZCHNI:

Zależności między jednostkami powierzchni wynikają z zależności między jednostkami długości:

1 km = 1000 m więc 1 $km^2 = (1000\ m)^2 = 1\ 000\ 000\ m^2$

1 m = 100 cm więc 1 $m^2 = (100\ cm)^2 = 10\ 000\ cm^2$

1 dm = 10 cm więc 1 $dm^2 = (10\ cm)^2 = 100\ cm^2$

1 cm = 10 mm więc 1 $cm^2 = (10\ mm)^2 = 100\ mm^2$

Powierzchnię działek, pól, lasów często przedstawia się w arach i hektarach:

1 a = 100 m^2

1 ha = 100 a = 10 000 m^2

$$\boxed{m^2} \xrightarrow{\cdot 100} \boxed{a} \xrightarrow{\cdot 100} \boxed{ha} \xrightarrow{\cdot 100} \boxed{km^2}$$

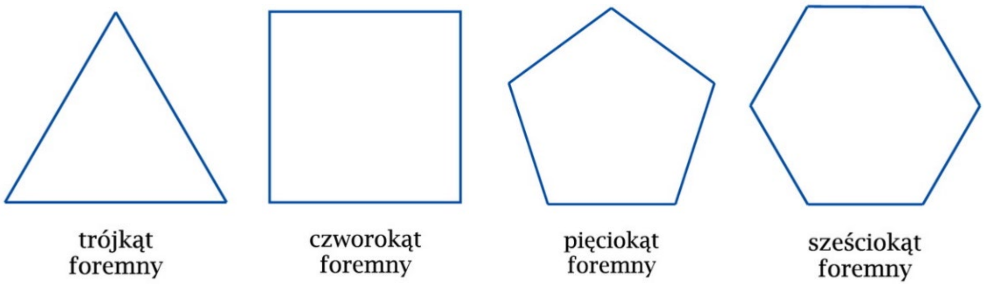
Zad.17. Wyraź podane powierzchnie we wskazanej jednostce.

a) 3 dm^2 = ... cm^2 c) 5 cm^2 = ... dm^2 e) 3 ha = ... a

b) 2 km^2 = ... m^2 d) 7 cm^2 = ... m^2 f) 700 m^2 = ... a

WIELOKĄTY FOREMNE:

Wielokąty, które mają wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe, są **foremne,** np.:



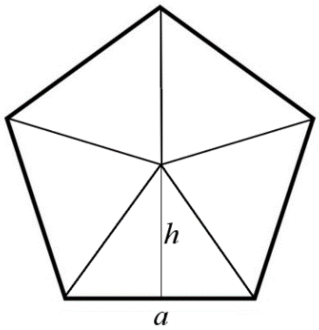
<u>kąt wewnętrzny</u>:

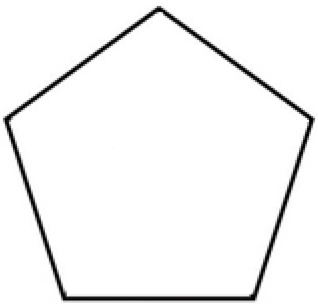
$$180^\circ - \frac{360}{n}$$

<u>liczba przekątnych</u>:

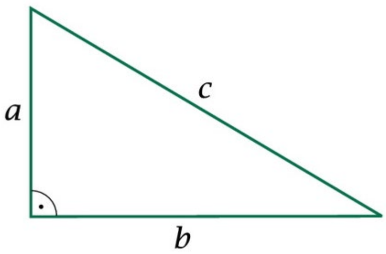
$$\frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Zad.18. Pięciokąt foremny jest zbudowany z pięciu jednakowych trójkątów równoramiennych. Oblicz pole i obwód pięciokąta foremnego jeśli każdy z takich trójkątów ma podstawę $a = 6$ i wysokość $h = 4$ (patrz rysunek). Podaj miarę kąta wewnętrznego i liczbę przekątnych pięciokąta foremnego.





TWIERDZENIE PITAGORASA:



Jeśli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej.

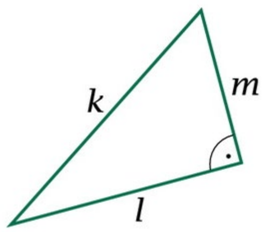
$$a^2 + b^2 = c^2$$

trójki pitagorejskie

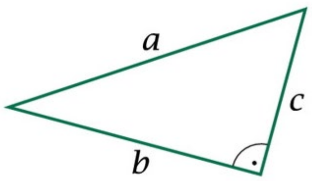
a	b	c
3	**4**	**5**
6	8	10
9	12	15
5	**12**	**13**
8	15	17

Zad.19. Zapisz związek między długościami boków poniższych trójkątów.

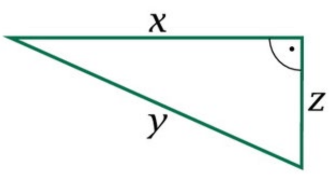
a)



b)

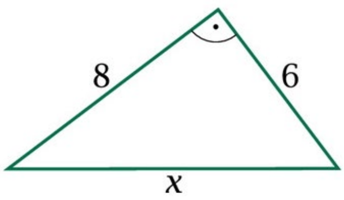


c)

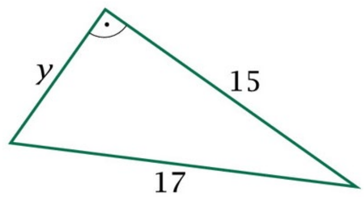


Zad.20. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

a)

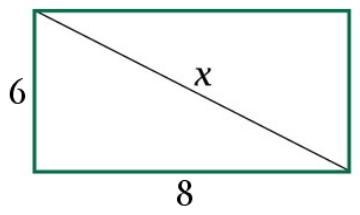


b)

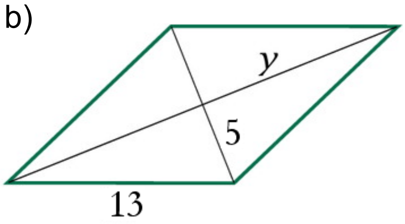


Zad.21. Narysowane czworokąty to prostokąt, romb i równoległobok. Podaj długości odcinków oznaczonych literami (skorzystaj z trójek pitagorejskich).

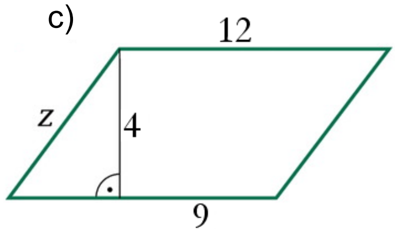
a)



b)

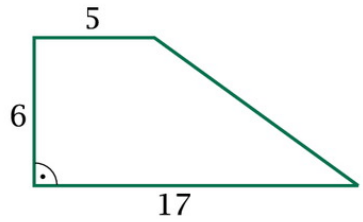


c)

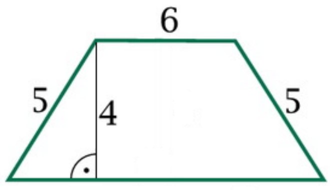


Zad.22. Oblicz obwody narysowanych trapezów.

a)

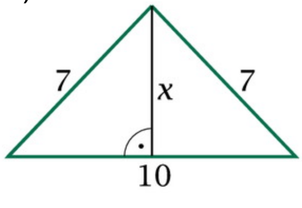


b)

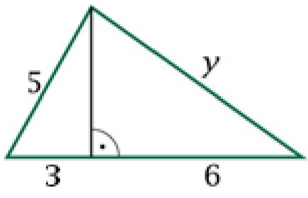


Zad.23. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

a)



b)

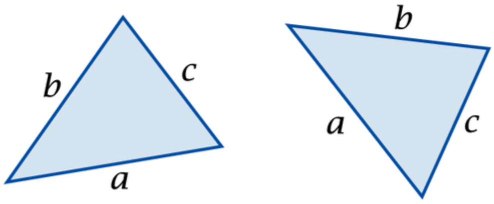


PRZYSTAWANIE TRÓJKĄTÓW:

Figury przystające to takie, które mają ten sam kształt i wielkość.

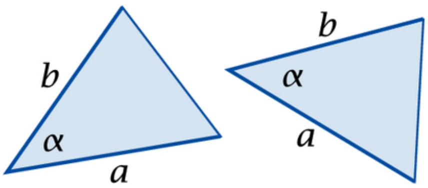
Gdybyśmy wycięli dwie figury przystające, to moglibyśmy przyłożyć jedną do drugiej tak, aby dokładnie się pokrywały. Figury przystające są identyczne.

Aby udowodnić, że dwa trójkąty są przystające, należy posłużyć się **cechami przystawania trójkątów**.



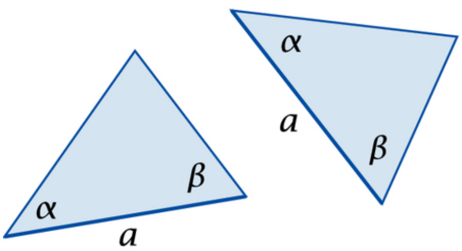
Jeżeli boki jednego trójkąta mają takie same długości jak odpowiednie boki drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.

Tę własność nazywamy pierwszą cechą przystawania trójkątów i oznaczamy w skrócie *bbb* (bok, bok, bok).



Jeżeli dwa boki jednego trójkąta mają takie same długości jak odpowiednie boki drugiego trójkąta i kąty między tymi bokami mają jednakowe miary, to trójkąty są przystające.

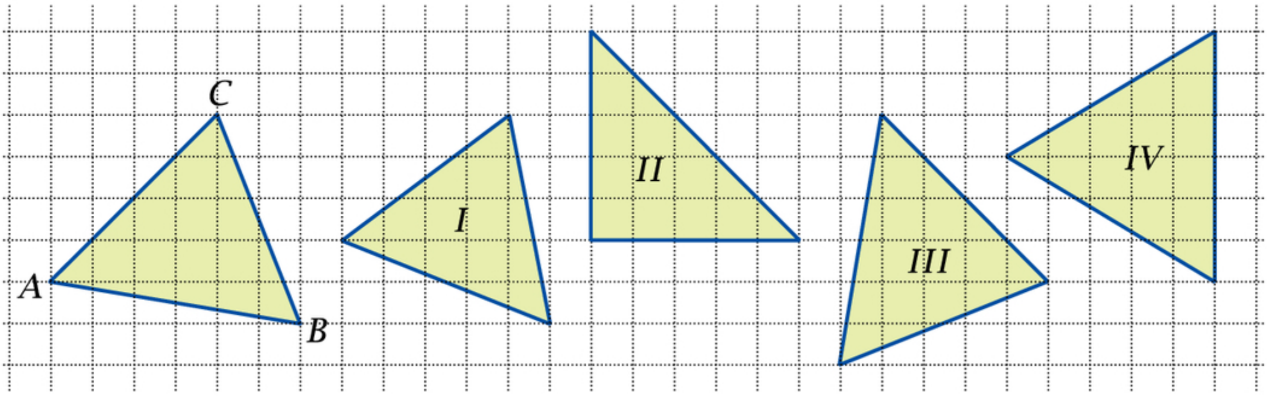
Tę własność nazywamy drugą cechą przystawania trójkątów i oznaczamy w skrócie *bkb* (bok, kąt, bok).



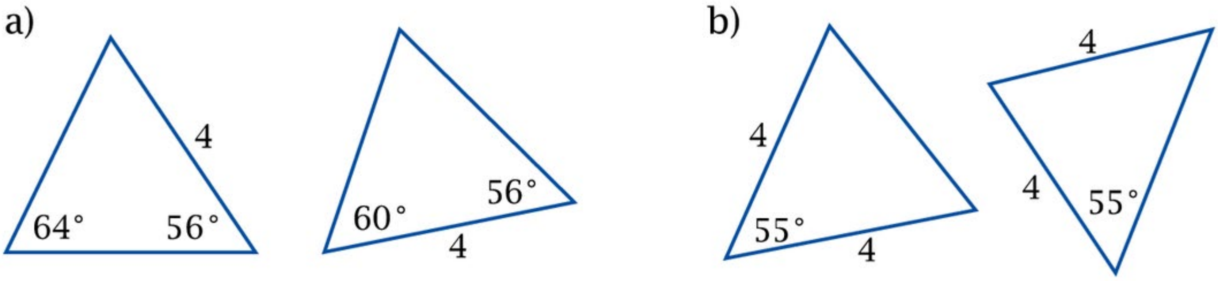
Jeżeli bok jednego trójkąta ma taką samą długość jak bok drugiego trójkąta, a kąty jednego trójkąta leżące przy tym boku mają takie same miary jak odpowiednie kąty drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.

Tę własność nazywamy trzecią cechą przystawania trójkątów i oznaczamy w skrócie *kbk* (kąt, bok, kąt).

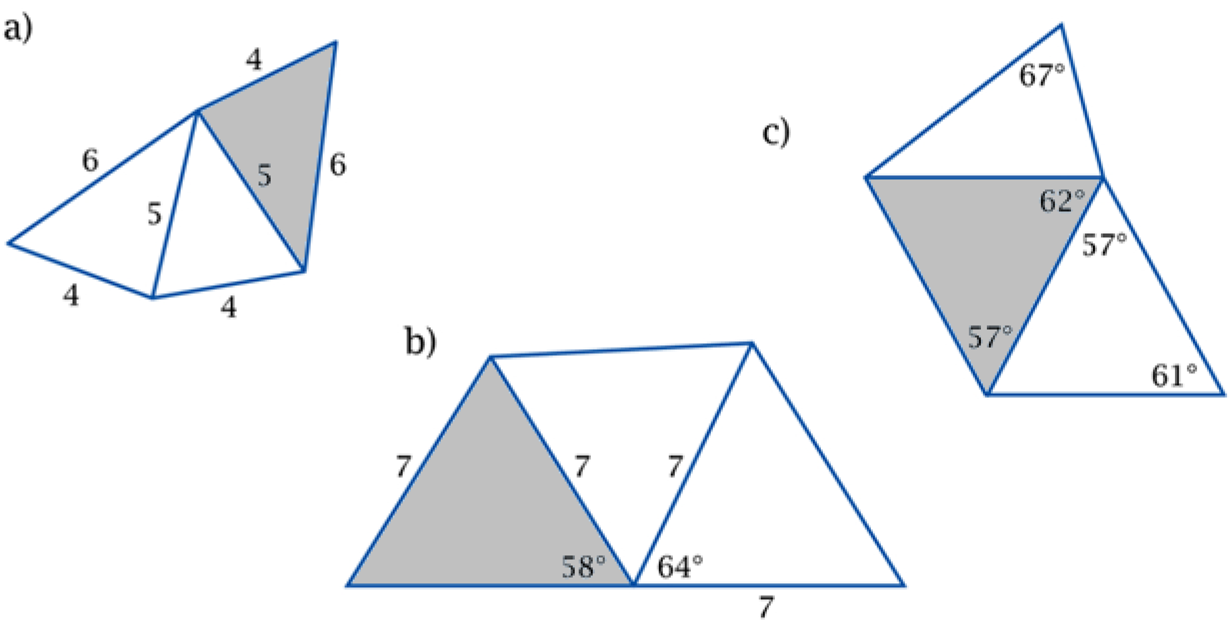
Zad.24. Który z narysowanych trójkątów jest przystający do trójkąta ABC ?



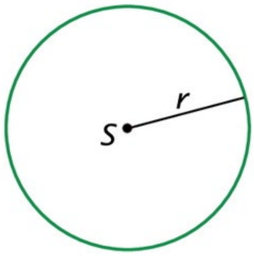
Zad.25. Czy narysowane trójkąty są przystające?



Zad.26. Znajdź na rysunku trójkąt przystający do zacieniowanego.



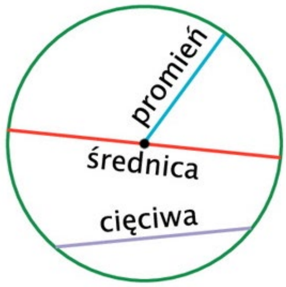
KOŁA i OKRĘGI



Okrąg o środku S i promieniu r tworzą wszystkie punkty, których odległość od punktu S jest równa r.

Koło o środku S i promieniu r tworzą wszystkie punkty, których odległość od punktu S jest równa r lub jest mniejsza od r.

Okrąg to brzeg koła. Okrąg to linia, którą rysuje nam cyrkiel. Koło to okrąg i jego wnętrze.



Promień, to odcinek łączący środek okręgu, koła z dowolnym punktem położonym na jego brzegu.

Cięciwa to odcinek łączący dowolne dwa punkty okręgu.

Średnica to najdłuższa cięciwa w okręgu (przechodząca przez środek).

Długość promienia jest równa połowie długości średnicy. Długość średnicy jest równa podwojonej długości promienia.

POLE KOŁA i DŁUGOŚĆ OKRĘGU:

Już w czasach starożytnych zauważono, że stosunek długości okręgu do długości średnicy jest dla wszystkich okręgów tą samą liczbą. Liczbę tę oznaczono jako π.

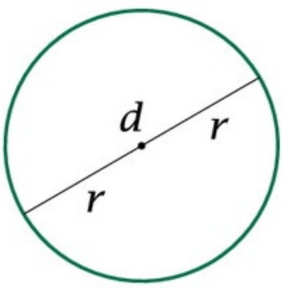
$$\frac{\textbf{długość okręgu}}{\textbf{długość średnicy}} = \boldsymbol{\pi}$$

Liczba π nie jest wymierna, jej rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone i nieokresowe:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 9\ldots$$

Ponieważ średnica d jest dwukrotnie większa od promienia okręgu, więc długość okręgu o promieniu r można obliczyć ze wzoru:

$\boxed{\boldsymbol{l = 2\pi r}}$ – wzór na długość okręgu



Zaś pole koła obliczymy za pomocą wzoru:

$\boxed{\boldsymbol{P = \pi r^2}}$ – wzór na pole koła

Zad.27. Zapisz w jak najprostszej postaci.

a) $3 \cdot 3\pi =$

c) $3\pi \cdot 4\pi =$

b) $3\pi + 4\pi =$

d) $\frac{6\pi}{2} =$

Zad.28. Podaj długości okręgów o promieniach:

a) $r = 2$

b) $r = 3$

Zad.29. Podaj długości okręgów o średnicach:

a) $d = 2$

b) $d = 10$

Zad.30. Podaj długości promieni kół o obwodach:

a) $l = 4\pi$

b) $l = 8\pi$

Zad.31. Podaj, jakie pola mają koła o promieniach:

a) $r = 2$

b) $r = 3$

Zad.32. Podaj, jakie pola mają koła o średnicach:

a) $d=2$

b) $d=12$

Zad.33. Oblicz promienie kół o polach:

a) $P=16\pi$

b) $P=100\pi$

Zad.34. Oblicz pole koła o obwodzie:

a) $l=16\pi$

b) $l=10\pi$

Zad.35. Oblicz obwód koła o polu:

a) $P=25\pi$

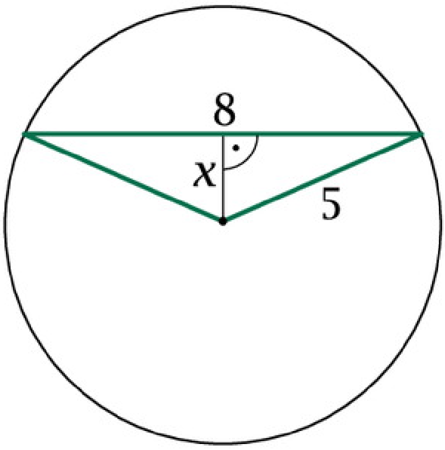
b) $P=49\pi$

Zad.36. Czy drutu o długości 50 cm wystarczy na wykonanie obręczy w kształcie okręgu o promieniu 10 cm (w obliczeniach przyjmij, że $\pi \approx 3$).

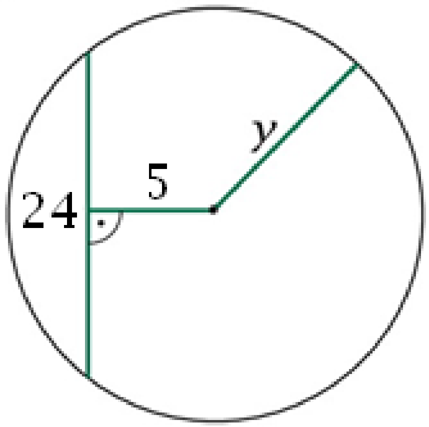
TRÓJKĄTY W OKRĘGACH:

Zad.37. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

a)

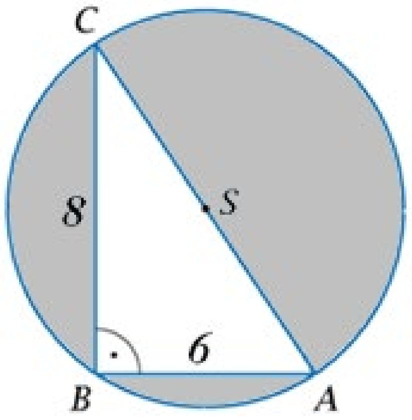


b)



Zad.38. W okręgu o środku S narysowano cięciwę AB, która jest trzy razy krótsza od średnicy okręgu. Końce cięciwy połączono odcinkami z środkiem okręgu. Oblicz pole powstałego trójkąta ASB wiedząc, że promień okręgu ma długość 6 cm.

Zad.39. Punkt S jest środkiem koła. Oblicz pole zacieniowanej na rysunku figury.



SKALA W GEOMETRII:

Skala informuje nas ile razy zmniejszyliśmy lub zwiększyliśmy wymiary danej figury:

skala 2 : 1   oznacza powiększenie 2-krotne

skala 1 : 2   oznacza pomniejszenie 2-krotne

skala 1 : 1   oznacza rysunek naturalnej wielkości

Uwaga !

Skala informuje nas, ile razy zwiększamy lub zmniejszamy DŁUGOŚCI ODCINKÓW w figurze - chodzi o długości boków, wysokości, przekątnych itp.

Skala NIE informuje nas, ile razy zwiększamy lub zmniejszamy POLE czy OBJĘTOŚĆ figury!

Zad.40. Prostokąt o bokach długości 3 cm i 4 cm narysowano w skali 2 : 1. Oblicz pole narysowanego prostokąta.

Zad.41. Kwadrat o polu 36 cm^2 narysowano w skali 1 : 2. Oblicz pole narysowanej figury.