

IV. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE i RÓWNANIA

Wyrażeniami algebraicznymi są wyrażenia zbudowane z liczb, liter, nawiasów i znaków działań np.

$$2a + b - 3 \cdot (a^2 - b)$$

JEDNOMIANY:

Jednomianami są wyrażenia w postaci liczb, liter lub iloczynu liczb i liter np. $-3ab^2c$.

Jednomian można uporządkować – czyli ustawić tak, by pierwszy stał czynnik liczbowy, a po nim czynniki literowe w kolejności alfabetycznej.

Suma algebraiczna to suma jednomianów.

Zad.1. Uporządkuj podane jednomiany:

a) $2abacb^3 =$

b) $-0,5a^2 \cdot (-6ab^2) \cdot (-a) =$

c) $-\frac{5}{7}x \cdot 7xy \cdot (-xz^3) =$

ODCZYTYWANIE i ZAPISYWANIE WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH:

Nazwa wyrażenia algebraicznego pochodzi od działania, które zgodnie z kolejnością wykonywania działań zrobimy jako ostatnie.

Dodawanie to SUMA, a dodajemy SKŁADNIKI.

Mnożenie to ILOCZYN, a mnożymy CZYNNIKI.

Odejmowanie to RÓŻNICA, czyli od ODJEMNEJ odejmujemy ODJEMNIK.

Dzielenie to ILORAZ, czyli dzielimy DZIELNĄ przez DZIELNIK.

Druga potęga to KWADRAT, a trzecia to SZEŚCIAN.

Zad.2. Zapisz następujące wyrażenia:

a) iloraz liczby a przez podwojony kwadrat liczby b :

b) sześcián różnicy liczb x i y :

c) różnica sześciánów liczb x i y :

Zad.3. Nazwij następujące wyrażenia (wybierz z: suma, różnica, iloczyn, iloraz, kwadrat, sześćcian).

a) $x^2 - 3$

b) $(x + 3)(x - 3)$

c) $\frac{x-3}{x+3}$

d) $(x + 3)^3$

OPISYWANIE ZA POMOCĄ WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH ZWIĄZKÓW MIĘDZY RÓŻNYMI WIELKOŚCIAMI:

Dla liczby n należącej do zbioru liczb całkowitych możemy zapisać:

– kolejne liczby całkowite: $n, n + 1, n + 2$, itd.

– kolejne liczby parzyste: $2n, 2n + 2, 2n + 4$, itd.

– kolejne liczby nieparzyste: $2n + 1, 2n + 3, 2n + 5$, itd.

– kolejne wielokrotności liczby 7: $7n, 7n + 7, 7n + 14$, itd.

– kolejne liczby, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 3: $5n + 3, 5n + 8, 5n + 13$, itd.

Średnia arytmetyczna liczb a, b, c, d to: $\frac{a+b+c+d}{4}$.

Liczba dwucyfrowa, w której cyfrą dziesiątek jest x , a cyfrą jedności jest y to: $10x + y$.

Zad.4. Zapisz następujące wyrażenia:

a) liczba o 3 większa od x :

d) liczba o 30% mniejsza od x :

b) liczba o 3 mniejsza od x :

e) liczba 3 razy większa od x :

c) liczba o 30% większa od x :

f) liczba 3 razy mniejsza od x :

Zad.5. W poniższych zdaniach n oznacza liczbę naturalną. Zapisz te zdania w postaci wyrażen algebraicznych.

a) Liczba naturalna poprzedzająca liczbę n to:

b) Liczba parzysta następująca po liczbie $2n$ to:

c) Liczba nieparzysta poprzedzająca liczbę $2n + 1$ to:

d) Średnia arytmetyczna liczb n i $n + 1$ to:

Zad.6. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:

a) liczbę dwucyfrową, której cyfra dziesiątek to x , a cyfra jedności to 9

b) liczbę trzycyfrową składającą się z a setek, 5 dziesiątek i b jedności

c) obwód prostokąta o bokach długości b i 5

Zad.7. Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne.

a) Cenę k złotych podwojono, a następnie obniżono o 19 zł. Nowa cena wynosi:

b) W torebce jest c cukierków. Dorzucono 9 cukierków i podzielono równo na 4 dzieci. Liczba cukierków przypadająca na jedno dziecko wynosi:

c) Bliźniaczki mają po m lat, a ich brat jest o 3 lata starszy. Suma wieku rodzeństwa to:

d) Z sali, w której było t uczniów, połowa wyszła, a następnie wróciło 6 uczniów. Ilu uczniów znajduje się teraz w sali?

e) Ania i Kasia mają razem 150 zł. Ania ma p zł. Ile pieniędzy ma Kasia?

OBLICZANIE WARTOŚCI LICZBOWYCH WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH:

Aby obliczyć wartość liczbową wyrażenia algebraicznego, należy podstawić do niego w miejsce liter odpowiadające im liczby, a następnie obliczyć wynik zgodnie z kolejnością wykonywania działań.

Zad.8. Oblicz wartość liczbową wyrażenia $5x - y^2$ dla $x = -1$ i $y = -3$

REDUKCJA WYRAZÓW PODOBNYCH:

Wyrazami podobnymi nazywamy te jednomiany, które po uporządkowaniu różnią się tylko współczynnikami liczbowymi (czynniki literowe są takie same). Redukcja wyrazów podobnych polega na zsumowaniu współczynników i zastąpienia wyrazów podobnych jednym.

Zad.9. Zredukuj wyrazy podobne:

$$4xy^2 - xy + 5 - 3xy + 2xy^2 - 1 =$$

DODAWANIE i ODEJMOWANIE SUM ALGEBRAICZNYCH:

Jeżeli przed nawiasem, w którym znajduje się suma algebraiczna występuje znak + (plus), to opuszczamy nawias i pozostawiamy sumę algebraiczną bez zmian.

Np.: $(a^2 - 2b + c) = a^2 - 2b + c$.

Jeżeli przed nawiasem, w którym znajduje się suma algebraiczna występuje znak - (minus), to opuszczamy nawias i zmieniamy znak na przeciwny przed każdym wyrazem tej sumy.

Np.: $-(a^2 - 2b + c) = -a^2 + 2b - c$.

Zad.10. Doprowadź do najprostszej postaci:

$$2x + (x - 2xy + 5) - (7x - 5xy - 8) =$$

MNOŻENIE JEDNOMIANU PRZEZ SUMĘ ALGEBRAICZNĄ:

Aby pomnożyć jednomian przez sumę algebraiczną, należy pomnożyć go przez każdy składnik sumy. Np.: $3 \cdot (a^2 - 2b + 5c) = 3a^2 - 6b + 15c$.



Zad.11. Doprowadź do najprostszej postaci:

$$3(x - 2xy + 5) - 2(x - 5xy - 8) =$$

DZIELENIE SUMY ALGEBRAICZNEJ PRZEZ JEDNOMIAN:

Aby podzielić sumę algebraiczną przez jednomian, należy każdy składnik sumy podzielić przez ten jednomian. Np.: $(3a^2 - 6b + 15c) : 3 = a^2 - 2b + 5c$.



Zad.12. Doprowadź do najprostszej postaci:

$$\frac{2x^2 - 4xy + 8}{2} =$$

MNOŻENIE SUM ALGEBRAICZNYCH:

Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, należy każdy wyraz pierwszej sumy pomnożyć przez każdy wyraz drugiej sumy, a następnie zredukować wyrazy podobne. Np.:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Zad.13. Doprowadź do najprostszej postaci:

$$(x - 2)(5x - 3) =$$

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ:

Równania to dwa wyrażenia algebraiczne połączone znakiem równości. Za pomocą równania opisujemy zależności między niewiadomymi, np. $4x + 2 = 14$

Liczba a spełnia równanie, jeśli po podstawieniu jej w miejsce niewiadomej po obu stronach równania otrzymamy te same liczby. Wtedy liczbę a nazwiemy rozwiązaniem równania.

Równaniami równoważnymi nazywamy równania, które mają te same rozwiązania.

Równanie, które spełniają wszystkie liczby, nazywamy równaniem tożsamościowym.

Równanie, którego nie spełnia żadna liczba, nazywamy równaniem sprzecznym.

Rozwiązywanie równania polega na przekształcaniu równania do sytuacji, w której otrzymujemy rozwiązanie, czyli liczbę spełniającą równanie. Odbywa się to za pomocą równań równoważnych, które otrzymujemy poprzez upraszczanie wyrażeń, a także:

- dodawanie do obu stron równania tej samej liczby lub tego samego wyrażenia
- odejmowanie od obu stron równania tej samej liczby lub tego samego wyrażenia
- mnożenie obu stron równania przez tę samą liczbę różną od zera
- dzielenie obu stron równania przez tę samą liczbę różną od zera

Zad.14. Sprawdź w pamięci, które z podanych liczb spełniają dane równanie:

a) $2x - 1 = 7$ 1, 4, 5 b) $x^2 + 3 = 28$ 1, 5, -5

Zad.15. Sprawdź, czy liczba 3 spełnia równanie:

$$5(n + 1) - 10 = 3n + 1$$

Zad.16. Rozwiąż równania:

a) $9x - 2 = 2x + 5$

b) $1 - \frac{6}{7}x = \frac{4}{7}$

c) $2x - (3x + 1) = 6 - x$

d) $(3x + 1)(x - 2) = 3x^2 + 3$

e) $\frac{3+2x}{2} = x + 1,5$

f) $\frac{x-1}{2} - \frac{3x-7}{10} = 1$

Zad.17. Czy te równania mają rozwiązanie? Zastanów się dlaczego.

a) $x^2 = -9$

b) $\frac{1}{x} = 0$

d) $\sqrt{x} = -4$

e) $x = x + 1$

Zad.18. Rozwiąż w pamięci równania:

a) $x - 6 = 0$

b)* $(x - 3)^2 = 0$

c)* $(x - 1)(x - 2) = 0$

d)* $(1 - x)^3 = -8$

PRZEKSZTAŁCANIE WZORÓW:

Przekształcanie wzorów polega na wyznaczeniu jednej zmiennej (litery), która we wzorze występuje jako szukana niewiadoma.

Postępujemy podobnie jak przy rozwiązywaniu równań – wykonujemy działania na obu stronach równania:

1. usuwamy mianowniki – jeśli we wzorze są mianowniki (ułamki) warto obie strony równania pomnożyć przez mianownik lub wspólny mianownik jeśli jest ich więcej i są różne
2. wymnażamy nawiasy – jeśli we wzorze są nawiasy należy się ich pozbyć
3. grupujemy wyrazy z szukaną niewiadomą na jednej stronie – przenosimy np. na lewą stronę wszystkie wyrazy z szukaną niewiadomą, a na prawą pozostałe wyrazy (przy okazji dokonujemy redukcji wyrazów podobnych)
4. dzielimy obie strony przez to, co stoi przy szukanej niewiadomej – po tej czynności po jednej stronie równania zostaje nam sama szukana niewiadoma

Zad.19. Wyznacz ze wzoru wskazaną wielkość.

a) $v = \frac{s}{t}$

$s = ?$

b) $E = mgh$

$m = ?$

c) $E = \frac{mv^2}{2}$

$v = ?$

d) $P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$

$a = ?$