

## II. POTĘGI i PIERWIASTKI

### POTĘGI:

Dla dowolnej liczby  $a$  definiujemy jej  $n$ -tą potęgę jako:  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$   
( $a$  to podstawa potęgi,  $n$  to wykładnik potęgi)

$$a^0 = 1 \text{ dla } a \neq 0 \quad \text{np. } 5^0 = 1$$

$$a^1 = a \quad \text{np. } 5^1 = 5$$

### Prawa działań na potęgach:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ np. $5^{15} \cdot 5^5 = 5^{20}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ np. $\left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^7 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^7 = 1$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ np. $\frac{5^{15}}{5^5} = 5^{10}$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ np. $\frac{8^5}{4^5} = \left(\frac{8}{4}\right)^5 = 2^5 = 32$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ np. $(5^2)^5 = 5^{10}$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ np. $(3x)^2 = 3^2 \cdot x^2 = 9x^2$
	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ np. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

### Pamiętaj:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad \text{ale} \quad (a + b)^n \neq a^n + b^n$$

Zad.1. Oblicz:

a)  $5^2 =$

c)  $3^3 =$

e)  $\left(\frac{3}{4}\right)^2 =$

b)  $7^2 =$

d)  $5^0 =$

f)  $\left(1\frac{1}{4}\right)^2 =$

Zad.2. Oblicz:

a)  $3^2 =$

d)  $2^3 =$

g)  $-\frac{2^2}{3} =$

b)  $(-3)^2 =$

e)  $(-2)^3 =$

h)  $-\left(\frac{2}{3}\right)^2 =$

c)  $-3^2 =$

f)  $-2^3 =$

i)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$

Zad.3. Oblicz:

a)  $-2^2 + 3^0 =$

d)  $-\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 9 + 2^3 =$

b)  $(-1)^5 - (-1)^4 =$

e)  $3^2 - 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 =$

c)  $3 - 2 \cdot (-3)^2 =$

f)  $2^1 + 2^2 + 2^3 =$

Zad.4. Oblicz wartość liczbową podanego niżej wyrażenia dla  $x = -1$

$$-x^3 - x^2 - x - 1 =$$

Zad.5. Przedstaw poniższe wyrażenia w postaci jednej potęgi:

a)  $(2^4 \cdot 2^3) : 2^2 =$

c)  $\frac{(0,5^2)^7 : 0,5^4}{0,5^6 \cdot 0,5} =$

b)  $(5^3 \cdot 5^2)^4 : (5^2)^3 =$

d)  $\frac{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5\right)^4}{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^6} =$

Zad.6. Oblicz (sprowadź potęgi do wspólnej podstawy):

a)  $\frac{2^6 \cdot 8^5}{4^9} =$

b)  $\frac{27^2 \cdot 3^4}{9^5} =$

Zad.7. Zapisz w postaci jednej potęgi:

a) połowę  $2^{50}$

b) trzecią część  $3^{60}$

Zad.8. Podnieś do potęgi podane iloczyny i ilorazy:

a)  $(-2x)^3 =$

c)  $\left(\frac{x}{2}\right)^4 =$

b)  $(3x^3)^2 =$

d)  $\left(-\frac{3x}{4}\right)^2 =$

Zad.9. Zapisz w postaci jednej potęgi i oblicz:

a)  $2^7 \cdot 5^7 =$

c)  $\frac{6^4}{3^4} =$

b)  $\left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot 8^5 =$

d)  $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 : \left(\frac{1}{9}\right)^3 =$

Zad.10. Oblicz (sprowadź potęgi do kilku wspólnych podstaw):

a)  $\frac{3^{13} \cdot 5^{11}}{15^{10}} =$

b)  $\frac{2^{30} \cdot 3^{20}}{12^{15}} =$

Zad.11. Podane wyrażenie zapisz w postaci odpowiedniej potęgi 2 lub 3:

a)  $2^5 + 2^5 =$

b)  $3^6 + 3^6 + 3^6 =$

Zad.12. W miejsce kropek wstaw odpowiedni znak nierówności:  $\boxed{>}$  lub  $\boxed{<}$ .

a)  $2^{12} \dots 2^{11}$

c)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{12} \dots \left(\frac{1}{5}\right)^{11}$

e)  $-\left(\frac{1}{5}\right)^{12} \dots -\left(\frac{1}{5}\right)^{11}$

b)  $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \dots \left(\frac{3}{2}\right)^{11}$

d)  $-3^{12} \dots -3^{11}$

f)  $(-0,2)^{12} \dots (-0,2)^{11}$

Zad.13. Która liczba jest większa:  $8^{30}$  czy  $4^{60}$ ? Odpowiedź uzasadnij.

### NOTACJA WYKŁADNICZA:

Notacji wykładniczej używamy do skrócenia zapisu wielocyfrowych liczb lub liczb o wielu miejscach po przecinku. W tym celu używamy potęgi liczby 10. Liczba zapisana w notacji wykładniczej, to iloczyn dwóch czynników, gdzie pierwszy czynnik jest liczbą z zakresu od 1 do 10, a drugi potęgą liczby 10:

$$a \cdot 10^n \quad \text{gdzie: } 1 \leq a < 10, \text{ zaś } n - \text{ jest liczbą całkowitą} \quad \text{np. } 1,23 \cdot 10^{-20}$$

Dla bardzo dużych liczb  
używamy potęgi 10 o wykładniku dodatnim

$$10^n = 1 \underbrace{0 \dots 0}_{n \text{ zer}}$$

Dla bardzo małych liczb  
używamy potęgi 10 o wykładniku ujemnym

$$10^{-n} = 0, \underbrace{0 \dots 01}_n \text{ miejsc po przecinku}$$

Zad.14. Przedstaw podaną liczbę w postaci notacji wykładniczej:

a)  $30000000 =$

d)  $0,000000782 =$

b)  $125000000 =$

e)\*  $0,0365 \cdot 10^{-24} =$

c)  $0,000002 =$

f)\*  $74,3 \cdot 10^{23} =$

Zad.15. Zapisz liczbę bez użycia notacji wykładniczej:

a)  $4,17 \cdot 10^5 =$

b)  $1,63 \cdot 10^{-4} =$

Zad.16. Wykonaj działania na notacjach wykładniczych:

a)  $8,2 \cdot 10^7 \cdot 7,5 \cdot 10^8 =$

b)  $\frac{2,1 \cdot 10^{21}}{8,4 \cdot 10^{12}} =$

## PIERWIASKI:

Pierwiastkiem drugiego stopnia z nieujemnej liczby  $a$  jest nieujemna liczba  $b$ , której druga potęga jest równa  $a$ :

$$\sqrt{a} = b \text{ jeśli } b^2 = a, \text{ np. } \sqrt{9} = 3, \text{ bo } 3^2 = 9.$$

Pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby  $a$  jest liczba  $b$ , której trzecia potęga jest równa  $a$ :

$$\sqrt[3]{a} = b \text{ jeśli } b^3 = a, \text{ np. } \sqrt[3]{8} = 2, \text{ bo } 2^3 = 8.$$

Prawa działań na pierwiastkach:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad \text{np. } \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad \text{np. } (\sqrt{2022})^2 = 2022$$

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$$

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a \quad \text{np. } (\sqrt[3]{2023})^3 = 2023$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{np. } \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$$

$$(\sqrt[3]{a})^6 = a^{6:3} \quad \text{np. } (\sqrt[3]{2})^6 = 2^2 = 4$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

Pamiętaj:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \text{np. } \sqrt{4 \cdot 9} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{np. } \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Zad.17. Oblicz:

a)  $\sqrt{9} =$

c)  $\sqrt{\frac{36}{49}} =$

e)  $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} =$

b)  $\sqrt{16} =$

d)  $\sqrt[3]{64} =$

f)  $\sqrt[3]{-125} =$

Zad.18. Oblicz:

a)  $\sqrt{1\frac{25}{144}} =$

b)  $\sqrt[3]{3 + \frac{3}{8}} =$

Zad.19. Korzystając z metody rozkładu na czynniki pierwsze oblicz:

$$\sqrt{1296} =$$

Zad.20. Oblicz:

a)  $\sqrt{100} + \sqrt{1} =$

d)  $\sqrt{64} - \sqrt[3]{64} =$

b)  $\sqrt{81} - \sqrt{25} =$

e)  $\sqrt[3]{4 + \sqrt{16}} =$

c)  $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{8} =$

f)  $\sqrt{\sqrt[3]{27} - \sqrt{4}} =$

Zad.21. Oblicz:

a)  $(\sqrt{5})^2 =$

d)  $(\sqrt{7})^3 =$

b)  $(\sqrt[3]{2})^3 =$

e)  $(2\sqrt{6})^2 =$

c)  $(\sqrt[3]{3})^6 =$

f)  $(3\sqrt{2})^3 =$

Zad.22. Oblicz:

a)  $\sqrt{3} + \sqrt{3} =$

b)  $6\sqrt{2} - \sqrt{2} =$

Zad.23. Oblicz:

a)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} =$

d)  $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{32}) =$

b)  $3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{7} =$

e)  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} =$

c)  $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{27} - \sqrt{12}) =$

f)  $\frac{6\sqrt{27}}{2\sqrt{3}} =$

Zad.24. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka:

a)  $\sqrt{12} =$

b)  $\sqrt{20} =$

c)  $\sqrt{72} =$

d)  $\sqrt[3]{32} =$

e)  $\sqrt[3]{54} =$

Zad.25. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka:

a)  $\sqrt{1260} =$

b)  $\sqrt[3]{1080} =$

Zad.26. Doprowadź do najprostszej postaci:

a)  $\sqrt{5} + \sqrt{20} =$

b)  $\sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{128} =$

Zad.27. Włącz czynnik pod znak pierwiastka:

a)  $4\sqrt{3} =$

c)  $2\sqrt[3]{5} =$

b)  $5\sqrt{2} =$

Zad.28. Która liczba jest większa:  $4\sqrt{3}$  czy  $5\sqrt{2}$  ?

Zad.29. Określ, między którymi liczbami naturalnymi na osi liczbowej znajduje się podany pierwiastek:

a)  $\dots < \sqrt{5} < \dots$

b)  $\dots < \sqrt{32} < \dots$

Zad.30. Znajdź największą liczbę całkowitą mniejszą od  $\sqrt{17} + 4$  oraz najmniejszą liczbę całkowitą większą od  $\sqrt{17} + 4$ .

Zad.\*31. Usuń niewymierność z mianownika:

a)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

b)  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$