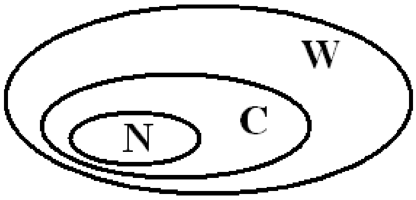
I. LICZBY i DZIAŁANIA



ZBIORY LICZBOWE:

liczby naturalne: to liczby całkowite dodatnie wraz z zerem np. $0, 1, 2, 3, 4, 5$

liczby całkowite: to liczby naturalne oraz ich ujemne odpowiedniki, a także liczba zero np. $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$

liczby wymierne: można przedstawić za pomocą ułamka zwykłego np. -3; $-2\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{3}$; 0; $2,(7)$; $3,14$

Każdą liczbę wymierną można przedstawić za pomocą ułamka dziesiętnego skończonego lub nieskończonego okresowego np.

$\frac{1}{8} = 0,125$ $\frac{1}{6} = 0,16666\ldots = 0,1(6)$

Istnieją liczby, których nie można przedstawić za pomocą ilorazu dwóch liczb. Przykładem takich liczb są pierwiastki liczb całkowitych, które nie są kwadratami, np. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ itd. Ich rozwinięcia dziesiętne nie są ani skończone, ani okresowe. Takie liczby **nie są wymierne**.

Zauważ:
ułamki o rozwinięciu dziesiętnym nieskończonym okresowym są wymierne
np.: $2,(64) = 2,64646464\ldots$

ułamki o rozwinięciu dziesiętnym nieskończonym nieokresowym są niewymierne
np.: $\sqrt{7} = 2,6457513\ldots$

liczby pierwsze: to liczby naturalne większe od 1, posiadające tylko dwa dzielniki (czyli dzielą się tylko przez 1 i przez samą siebie), np. $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$

liczby złożone: to liczby naturalne większe od 1, które mają więcej niż dwa dzielniki, np. $4, 6, 8, 9, \ldots$

Zauważ:
liczba 0 oraz liczba 1 nie jest ani pierwsza, ani złożona

liczby przeciwne: mają tę samą wartość, ale przeciwny znak (ich suma wynosi 0) np. 2 i -2

liczby odwrotne: zapisane za pomocą ułamka zwykłego niewłaściwego mają zamieniony względem siebie licznik z mianownikiem (ich iloczyn jest równy 1) np. $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{2}$ albo 3 i $\frac{1}{3}$

Zad.1. Określ do jakiego zbioru należą podane poniżej liczby.
(wpisz: naturalne N, całkowite C, wymierne W, niewymierne NW)

3 : .... $-\frac{8}{4}$: .... $\sqrt{4}$: ....

-2 : .... $1,(7)$: .... $\sqrt[3]{-8}$: ....

$-1\frac{2}{3}$: .... $\sqrt{3}$: ....

Zad.2. W zbiorze A podkreśl liczby wymierne: $A = \left\{-8,(12);\ \ -5;\ \ \frac{1}{3};\ \ \sqrt[3]{8};\ \ \sqrt{3};\ \ \sqrt{16}\right\}$

Wybrane metody zliczania elementów zbiorów liczbowych:

Licząc z pomocą odejmowania ilość kolejnych liczb całkowitych zastanówmy się, czy chcemy liczyć włącznie z pierwszą i ostatnią liczbą, czy nie.

Zad.3. Policz:

a) ile stron liczy rozdział, który zaczyna się na stronie 13, a kończy na stronie 37

b) ile jest liczb całkowitych pomiędzy liczbami 13 i 37

c) ile metrów trzeba się wspinać, jeśli ruszamy z wysokości 13 m, a chcemy dojść do 37 m

SYSTEM RZYMSKI:

I = 1 V = 5 X = 10 L = 50 C = 100 D = 500 M = 1000	▪ jeżeli po znaku rzymskim występuje znak oznaczający liczbę mniejszą lub równą, to liczby dodajemy, np. LX = 50 + 10 = 60 ▪ obok siebie nie mogą występować dwa znaki V, L, D ▪ obok siebie mogą występować maksymalnie trzy znaki I, X, C, M ▪ jeżeli po znaku rzymskim występuje znak oznaczający liczbę większą, to od liczby większej odejmujemy mniejszą, np. CM = 1000 – 100 = 900 IV = 4 XL = 40 CD = 400 IX = 9 XC = 90 CM = 900

Zad.4. Zapisz jakie to liczby:

a) XVII ....
d) CDLXI ....

b) XLII ....
e) MCMXIV ....

c) LXXIV ....
f) MMCDLV ....

Zad.5. Zapisz podane liczby znakami rzymskimi:

a) 48 ....
c) 467 ....
e) 1410 ....

b) 154 ....
d) 896 ....
f) 2018 ....

CECHY PODZIELNOŚCI LICZB:

Liczba naturalna jest podzielna przez:
2 – gdy jest liczbą parzystą, gdy jej ostatnią cyfrą jest: 0, 2, 4, 6, 8 (np. 374)
3 – gdy suma jej cyfr dzieli się przez 3 (np. 483)
4 – gdy liczba utworzona z jej dwóch ostatnich cyfr dzieli się przez 4 (np. 712)
5 – gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5 (np. 105)
9 – gdy jej suma cyfr dzieli się przez 9 (np. 234)
10 – gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 (np. 230)

* zauważ, że liczba naturalna jest podzielna przez
6 – gdy jest podzielna przez 2 i 3 (np. 228)
12 – gdy jest podzielna przez 3 i 4 (np. 432)
15 – gdy jest podzielna przez 3 i 5 (np. 765) itd.

WIELOKROTNOŚCI i DZIELNIKI:

Każdą liczbę naturalną możemy pomnożyć przez inną liczbę naturalną i taki iloczyn to wielokrotność, np. wielokrotności liczby 8 to: 0, 8, 16, 24, itd.

Każda liczba naturalną, przez którą dzieli się bez reszty dana liczba to dzielnik danej liczby, np. dzielniki liczby 8 to: 1, 2, 4, 8.

NWD to największy wspólny dzielnik dwóch lub więcej liczb naturalnych [korzystamy z niego np. przy skracaniu ułamków].

NWW to najmniejsza wspólna wielokrotność dwóch lub więcej liczb naturalnych [korzystamy z niej np. przy wyznaczaniu wspólnego mianownika].

np.

NWD (12, 18) = 6 — 6 to największa liczba, przez którą podzieli się 12 i 18
to przez 6 skrócimy ułamek $\frac{12}{18}$

NWW (12, 18) = 36 — 36 to najmniejsza liczba, która podzieli się przez 12 i 18
to 36 będzie wspólnym mianownikiem dla $\frac{1}{12}$ i $\frac{1}{18}$

Obliczając NWD i NWW możemy posłużyć się rozkładem na czynniki pierwsze.
Szukając NWD (84, 126) i NWW (84, 126) wykonujemy:

rozkładamy liczby na czynniki pierwsze

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

zaznaczamy powtarzające się czynniki

$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$

obliczamy NWD i NWW

NWD (84, 126) $= 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

NWW (84, 126) $= 2 \cdot 126 = 252$

lub $= 3 \cdot 84 = 252$

Zad.6. Wśród liczb 351, 465, 512, 740 wybierz wszystkie te, które są podzielne przez:

a) :2 .... c) :4 .... e) :9 ....

b) :3 .... d) :5 .... f)* :15 ....

Zad.7. Ile dzielników ma liczba 36?

Zad.8. Wyznacz:

a) NWD (8, 12) = ... c) NWD (3, 7) = ... e) NWW (7, 14) = ...

b) NWD (5, 10) = ... d) NWW (3, 7) = ... f) NWW (6, 8) = ...

g) NWD (330, 420) = ……...............

h) NWW (330, 420) = ……...........

Zad.9. Listewkę o długości 50 cm planowano pociąć na równe części. Iwona zaproponowała podział na kawałki po 5 cm i zaznaczyła na listewce czerwonym kolorem linie cięcia. Agata chciała podzielić tę samą listewkę na części po 2 cm i linie cięcia zaznaczyła na zielono. Ile razy linia czerwona pokrywała się z linią zieloną?

DZIELENIE Z RESZTĄ:

$a : b = w$ reszta r, jeżeli $a = b \cdot w + r$

Reszta jest zawsze mniejsza od dzielnika.

Zad.10. Wykonaj dzielenie z resztą i zrób sprawdzenie otrzymanego wyniku:

$25 : 7 =$ bo

Zad.11. Znajdź liczby oznaczone literami

a) $a : 12 = 5$ reszta 9 b) $163 : b = 5$ reszta 13

ZAOKRĄGLANIE LICZB:

Zaokrąglanie liczb polega na:
- wskazaniu cyfry, względem której określane jest zaokrąglenie,
- zastąpieniu zerami wszystkich cyfr na prawo od wskazanej,
- zwiększeniu wskazanej cyfry o jeden, jeśli sąsiednia z prawej cyfra była większa lub równa 5.

np. zaokrąglimy daną liczbę

– do całości (liczby całkowitej): $7{,}68 \approx 8$ $31{,}23 \approx 31$

– do 0,01 (części setnych): $0{,}6378 \approx 0{,}64$ $0{,}952 \approx 0{,}95$

– do 100 (pełnych setek): $181{,}457 \approx 200$ $5691 \approx 5700$ $31 \approx 0$

Zad.12. Zaokrąglij daną liczbę do całości:

a) $5{,}72 \approx$ b) $1{,}29 \approx$ c)* $13,(7) \approx$

Zad.13. Zaokrąglij daną liczbę do 0,01 (części setnych):

a) $0{,}5281 \approx$ b) $4{,}851 \approx$ c)* $5,(63) \approx$

Zad.14. Zaokrąglij daną liczbę do pełnych setek:

a) $273{,}387 \approx$ c) $51 \approx$

b) $7483 \approx$ d) $48 \approx$

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA:

Wartość bezwzględna z liczby nieujemnej, to ta sama liczba, np. $|3| = 3$, $|0| = 0$.

Wartość bezwzględna z liczby ujemnej, to liczba do niej przeciwna, np. $|-3| = 3$.

Zad.15. Oblicz:

a) $|-4| + |3| =$ b) $2 \cdot |-3| - |-2| =$

DZIAŁANIA NA LICZBACH:

Dodawanie to SUMA, a dodajemy SKŁADNIKI.
Mnożenie to ILOCZYN, a mnożymy CZYNNIKI.
Odejmowanie to RÓŻNICA, od ODJEMNEJ odejmujemy ODJEMNIK.
Dzielenie to ILORAZ, dzielimy DZIELNĄ przez DZIELNIK.

Druga potęga liczby to KWADRAT tej liczby, a trzecia to SZEŚCIAN.

KOLEJNOŚĆ WYKONYWANIA DZIAŁAŃ:

W pierwszej kolejności wykonujemy działania w nawiasach, a potem:
- potęgowanie i pierwiastkowanie
- mnożenie i dzielenie
- dodawanie i odejmowanie

W wyrażeniach, w których występuje wyłącznie dzielenie, bądź dzielenie z mnożeniem, działania wykonujemy w kolejności występowania (od lewej do prawej). Podobnie z odejmowaniem i odejmowaniem z dodawaniem.

np. $6 : 2 \cdot 3 = 9$ (a nie 1)

Zad.16. Oblicz:

a) $12 - 3 \cdot 2^2 =$

b) $10 - (-2)^2 =$

c) $12 : 3 \cdot 4 =$

d) $19 + 1 - 17 + 3 =$

DZIAŁANIA NA UŁAMKACH ZWYKŁYCH:

Ułamek właściwy ma licznik mniejszy od mianownika, np. $\frac{2}{3}$.

Ułamek niewłaściwy
ma licznik większy od mianownika, można go zamienić na liczbę mieszaną, np. $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

Aby dodać lub odjąć ułamki zwykłe, należy sprowadzić je do wspólnego mianownika, a następnie wykonać działania na licznikach, zaś mianownik pozostawić bez zmian.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8+3}{12} = \frac{11}{12}$$

Aby pomnożyć ułamki zwykłe, należy wcześniej ułamki mieszane zamienić na niewłaściwe, a następnie pomnożyć liczniki i mianowniki.

$$2\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{12}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{12\cdot 3}{5\cdot 4}=\frac{36}{20}=1\frac{16}{20}=1\frac{4}{5}$$

Aby podzielić ułamki zwykłe, należy wcześniej ułamki mieszane zamienić na niewłaściwe, a następnie pomnożyć dzielną przez odwrotność dzielnika.

$$1\frac{2}{5}:1\frac{1}{3}=\frac{7}{5}:\frac{4}{3}=\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{7\cdot 3}{5\cdot 4}=\frac{21}{20}=1\frac{1}{20}$$

Uwaga: skracać można tylko licznik z mianownikiem w tym samym ułamku lub „na krzyż" w mnożeniu.

Zad.17. Oblicz:

a) $\frac{3}{7}+3\frac{1}{3}=$

b) $4\frac{1}{7}-1\frac{5}{7}=$

c) $1\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=$

d) $2\frac{2}{3}:1\frac{2}{9}=$

Zad.18. Oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{\frac{5}{7}-\frac{2}{7}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{4}=$$

Działania na ułamkach dziesiętnych:

Dodając i odejmując pisemnie ułamki dziesiętne pamiętajmy, by przecinki były jeden pod drugim.

W mnożeniu sumujemy ilość miejsc po przecinku.

$0{,}03\cdot 0{,}2=0{,}006$

W dzieleniu przesuwamy przecinki w dzielnej i dzielniku o tyle samo miejsc, by dzielnik był liczbą całkowitą.

$1{,}2:0{,}06=120:6=20$

Zad.19. Oblicz pisemnie:

a) $135{,}6 + 8{,}71 =$

b) $3000{,}4 - 6{,}52 =$

c) $2{,}6 \cdot 4{,}15 =$

d) $0{,}414 : 1{,}2 =$

ROZWINIĘCIA DZIESIĘTNE LICZB:

Aby zamienić ułamek zwykły na dziesiętny, należy rozszerzyć go do ułamka o mianowniku 10, 100, 1000 itd. lub podzielić licznik przez mianownik.

$\frac{13}{20} = \frac{13 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{65}{100} = 0{,}65$ lub $\frac{13}{20} = 13 : 20 = 0{,}65$

* Ułamki zwykłe, których nie da się rozszerzyć do ułamka o mianowniku 10, 100, 1000 itd., mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone okresowe. Rozwinięcie dziesiętne takiego ułamka można otrzymać w wyniku dzielenia licznika przez mianownik.

$\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}333333... = 0{,}(3)$

$\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0{,}666666... = 0{,}(6)$

Zad.20. Zapisz rozwinięcia dziesiętne liczb:

a) $\frac{1}{4} =$

b) $2\frac{3}{5} =$

c) $5\frac{7}{20} =$

d) $1\frac{3}{25} =$

e) $6\frac{7}{50} =$

f) $\frac{3}{8} =$

g)* $4\frac{1}{3} =$

h)* $\frac{5}{6} =$

UŁAMEK LICZBY:

Aby obliczyć ułamek pewnej wielkości, można pomnożyć ten ułamek przez tę wielkość.

$\frac{2}{3}$ liczby 27 to $\frac{2}{3} \cdot 27 = 18$

Zad.21. Tomek miał 9 zł. Na słodycze wydał $\frac{3}{4}$ tej kwoty. Czyli ile zł wydał?

Zad.22. Jola dostała na urodziny 450 zł, ale zaraz wydała $\frac{2}{5}$ tej kwoty. Ile zł jej zostało?

Zad.23. W butelce było 1,5 litra soku. Jarek wypił $\frac{2}{3}$ zawartości butelki, a Ania $\frac{3}{4}$ tego, co zostało. Ile litrów soku zostało na końcu w butelce?

Zad.24. Zmieszano 60 dag rodzynek w cenie 12 zł za kilogram, 70 dag pestek dyni w cenie 18 zł za kilogram oraz 20 dag orzechów w cenie 24 zł za kilogram. Ile kosztuje kilogram tej mieszanki?

Zad.25. Paweł powiedział, że podzieli tabliczkę czekolady w taki sposób, że bratu przypadnie $\frac{1}{2}$ całej tabliczki, siostrze $\frac{5}{12}$ całej tabliczki, a jemu $\frac{1}{6}$ całej tabliczki. Czy taki podział tabliczki czekolady jest możliwy? Uzasadnij swoją odpowiedź.

PORÓWNYWANIE UŁAMKÓW:

Ułamki zwykłe możemy łatwo porównać, jeśli mają wspólny licznik lub wspólny mianownik.

Gdy ułamki mają jednakowe mianowniki, większym będzie ten, który ma większy licznik:

$$\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$$

Gdy ułamki mają jednakowe liczniki, większym będzie ten, który ma mniejszy mianownik:

$$\frac{5}{7} > \frac{5}{9}$$

Ułamki dziesiętne łatwo porównać, jeśli mają identyczną liczbę miejsc po przecinku. Możemy doprowadzić do tego dopisując odpowiednią liczbę zer na końcu ułamka (po przecinku).

Ułamki zwykłe porównamy z dziesiętnymi zapisując ich rozwinięcia dziesiętne.

Zad.26. Porównaj liczby. W miejsce kropek wstaw odpowiedni znak: $\boxed{>}$, $\boxed{<}$, $\boxed{=}$.

a) $3\frac{5}{7}$ ……. $2\frac{8}{9}$

b) $\frac{3}{4}$ ……. $\frac{7}{8}$

c) $\frac{2}{3}$ ……. $\frac{4}{7}$

d) 0,35 ……. 0,7

e) $\frac{5}{7}$ ……. 0,73

f)* $\frac{1}{3}$ ……. 0,(3)

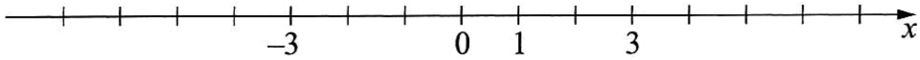
Zad.27. Wstaw odpowiedni ułamek, aby spełnione zostały nierówności.

a) $\frac{3}{7} < \boxed{} < \frac{4}{7}$

b) $\frac{5}{9} < \boxed{} < \frac{5}{8}$

OŚ LICZBOWA:

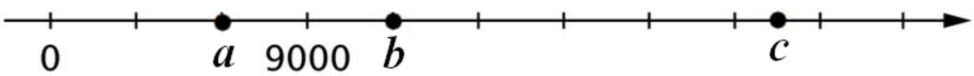
Oś liczbowa podzielona jest na odcinki równej długości. Każdemu punktowi na osi liczbowej przyporządkowana jest liczba, zwana jego współrzędną.



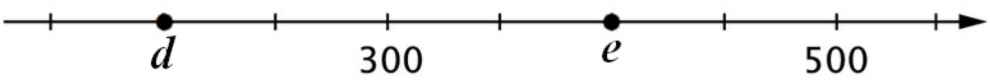
Znając współrzędne dwóch punktów i ilość odcinków je dzielących możemy określić podziałkę danej osi, czyli o ile zwiększa się liczba na osi co jeden odcinek.

Zad.28. Określ podziałkę i odczytaj, jakie liczby zaznaczono na osi liczbowej.

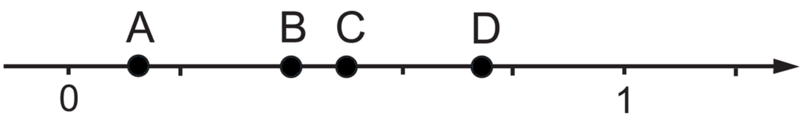
a)



b)



Zad.29. Dopasuj litery do odpowiednich ułamków: $\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}$.



Zad.30. Dopasuj litery do odpowiednich ułamków: 3,3; 3,25; 3,6; 3,5; 3,255.